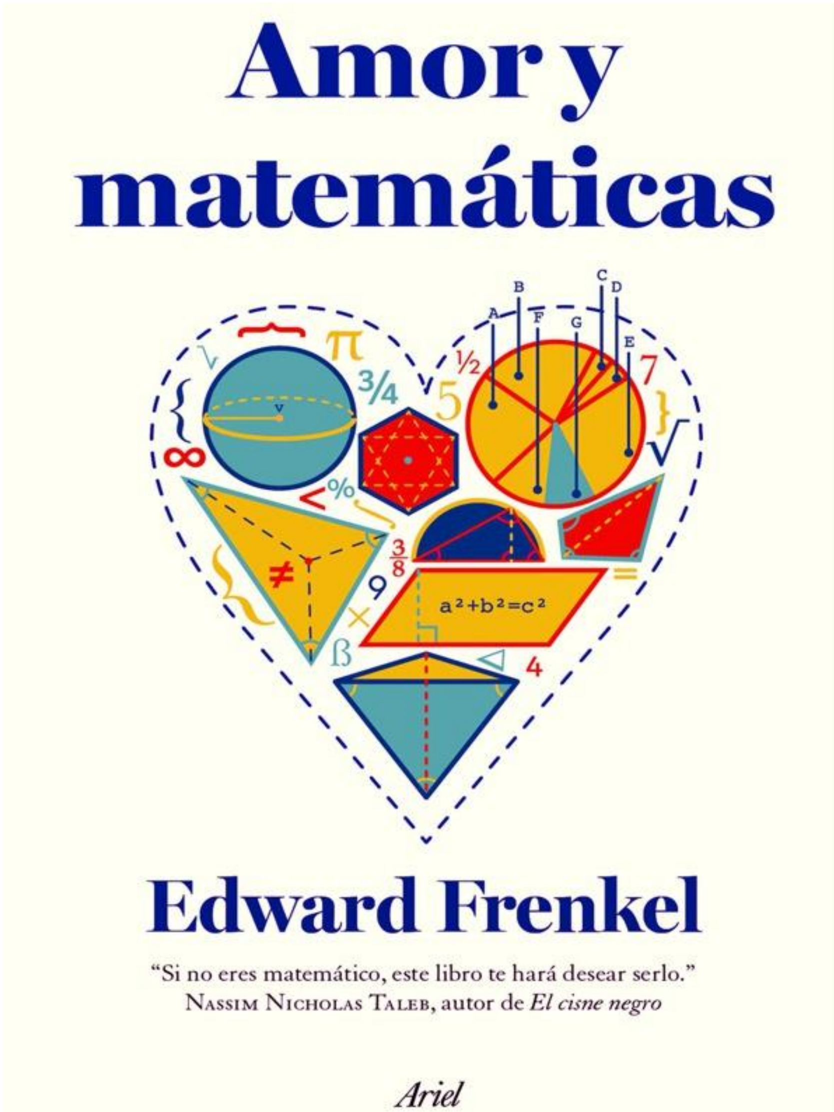

Amor y matemáticas
a²+b²=c²
Edward Frenkel
"Si no eres matemático, este libro te hará desear serlo."
Nassim Nicholas Taleb, autor de El cisne negro
Ariel

Reseña

¿Qué sucedería si en clase de arte te enseñaran a pintar una verja? ¿O que jamás te mostraran una pintura ni te hablaran de la existencia de Van Gogh o Picasso? Pues así es como nos han enseñado las matemáticas. En este fascinante libro, uno de los matemáticos más brillantes del momento nos descubre el lado de las matemáticas que jamás hemos visto, barnizadas con toda la belleza y elegancia de una pieza de arte. Frenkel nos sumerge en una disciplina presente en el corazón de toda materia, que une culturas, tiempo y espacio. Y lo hace a través de dos historias, la de la evolución y los grandes hallazgos de las matemáticas, y, de forma paralela, la de su biografía personal, que le llevó de ser rechazado en la facultad de matemáticas de Moscú a convertirse en uno de los matemáticos más importantes del siglo XXI. Pero el libro no es sólo una apasionante historia de superación personal teñida de divulgación científica, sino que nos introduce en una nueva forma de pensamiento capaz de enriquecer nuestra vida personal y ayudarnos a entender mejor el mundo y el lugar que ocupamos en él. Es una invitación a descubrir la magia del universo escondido de las matemáticas.

Índice

Prefacio

Hay un mundo secreto ahí fuera. Un universo oculto, paralelo, de belleza y elegancia, intrincadamente conectado con el nuestro. Es el mundo de las matemáticas. Y a la mayoría de nosotros nos resulta invisible. Este libro es una invitación a descubrir ese mundo.

Piense en la paradoja: por una parte, las matemáticas están presentes en el tejido mismo de nuestras vidas. Cada vez que realizamos una compra *online*, enviamos un mensaje de texto, efectuamos una búsqueda por Internet o empleamos un dispositivo GPS, hay fórmulas y algoritmos matemáticos en acción. Por otra parte, a la mayoría de la gente las matemáticas la intimidan. Se han convertido, en palabras del poeta Hans Magnus Enzensberger, en «un punto ciego de nuestra cultura: territorio ajeno, en el que sólo la élite, unos cuantos iniciados, han conseguido atrincherarse». Es infrecuente, asegura, «encontrarse con alguien que declare públicamente que la mera idea de leer una novela, mirar un cuadro o ver una película le causa un sufrimiento insoportable», y sin embargo, «gente sensata, educada», a menudo dice «con una notable mezcla de provocación y orgullo» que las matemáticas son «una auténtica tortura» o «una pesadilla» que «les deprime».

¿Cómo se puede dar esta anomalía? Veo dos razones principales: la primera, que las matemáticas son más abstractas que otras asignaturas y, por tanto, menos accesibles. La segunda, que lo que estudiamos en la escuela es tan sólo una diminuta parte de las matemáticas, en general establecida hace más de un milenio. Las matemáticas han avanzado tremendamente desde entonces, pero estos tesoros se nos han escamoteado.

¿Se imagina que en la escuela hubiera asistido a una «clase de arte» en la que sólo le hubieran enseñado a pintar una valla? ¿Que nunca le mostraran las obras de Leonardo da Vinci o de Picasso? ¿Apreciaría el arte? Lo dudo. Probablemente diría algo así: «aprender arte en la escuela fue una pérdida de tiempo. Si alguna vez necesito pintar mi valla, pagaré a alguien para que lo

haga». Obviamente suena ridículo, pero es como se enseñan las matemáticas, así que, a ojos de la mayoría, son el equivalente a mirar cómo se seca la pintura. Mientras que las obras de los grandes maestros se encuentran por todas partes, las matemáticas de los grandes maestros se encuentran encerradas bajo llave.

Sin embargo, no es tan sólo la belleza estética de las matemáticas lo que las hace fascinantes. Como dijera Galileo, «las leyes de la Naturaleza están escritas en el lenguaje de las matemáticas». Las matemáticas son una manera de describir la realidad y averiguar cómo funciona el mundo, un lenguaje universal que se ha convertido en el patrón oro de la verdad. En nuestro mundo, cada vez más regido por la ciencia y la tecnología, las matemáticas se están convirtiendo, con mayor frecuencia, en fuente de riqueza, poder y progreso. De ahí que quienes hablen correctamente este nuevo idioma se encontrarán en la vanguardia del progreso.

Uno de los conceptos erróneos más extendidos es que las matemáticas sólo pueden emplearse como «herramienta»: por ejemplo, un biólogo realiza trabajo de campo, recoge datos e intenta construir un modelo matemático que encaje con estos datos (quizá con ayuda de un matemático). Aunque este es un importante modo de funcionar, las matemáticas nos ofrecen *mucho más*: nos permiten realizar cambios revolucionarios, capaces de provocar variaciones de paradigma, de los que no seríamos capaces de ninguna otra manera. Por ejemplo, Albert Einstein no intentaba encajar datos con ecuaciones cuando comprendió que la gravedad afecta al espacio curvándolo. Esos datos ni existían. En aquella época nadie podía imaginar que el espacio se curvara; ¡todo el mundo «sabía» que nuestro universo era plano! Pero Einstein se dio cuenta de que era la única manera de extrapolar su teoría de la relatividad especial a sistemas no inerciales, y esto se combinó con su noción de que gravedad y aceleración producen el mismo efecto. Se trataba de un ejercicio intelectual de alto nivel en el reino de las matemáticas, para el que Einstein confió en la obra de un matemático, Bernhard Riemann, publicada

cincuenta años atrás. El cerebro humano está formado de tal manera que somos sencillamente incapaces de imaginar espacios curvos de más de dos dimensiones. Tan sólo podemos acceder a ellos mediante las matemáticas. Y lo que resultó fue que Einstein tenía razón: nuestro universo *está* curvado, y aún más: ¡se está expandiendo! ¡Ese es el poder de las matemáticas del que hablaba!

Se pueden hallar muchos ejemplos más como este, y no sólo en física, sino en muchas otras áreas de la ciencia: hablaremos de algunas más adelante. La historia demuestra que las matemáticas cambian la ciencia y la tecnología a un ritmo acelerado; incluso teorías matemáticas que al principio se ven como abstractas y esotéricas se convierten, más tarde, en parte indispensable de sus aplicaciones prácticas. Charles Darwin, cuya obra, al comienzo, prescindía de las matemáticas, escribió posteriormente, en su autobiografía: «Siempre me he arrepentido sinceramente de no haber profundizado más para comprender siquiera parte de los grandes principios de las matemáticas, pues los hombres que lo consiguen parecen dotados de un sentido extra». Creo que es un clarividente consejo a las generaciones por venir: invertid en el inmenso potencial de las matemáticas.

De niño yo no era consciente del mundo oculto de las matemáticas. Como la mayoría de la gente, pensaba que las matemáticas eran una asignatura difícil y aburrida.

Pero tuve suerte: en mi último año de secundaria conocí a un matemático profesional que me abrió las puertas del mágico mundo de las matemáticas. Aprendí que estas están llenas de infinitas posibilidades, así como de elegancia y belleza, al igual que la poesía, el arte y la música. Y me enamoré de las matemáticas.

* * * *

El lenguaje matemático es diferente a todos los demás conocimientos. Mientras

que nuestra percepción del mundo físico puede verse distorsionada, nuestra percepción de las verdades matemáticas, no. Son verdades objetivas, persistentes y necesarias. Una fórmula o teorema matemático significa lo mismo para cualquiera en cualquier lugar: no importa sexo, religión o color de piel; significará lo mismo para alguien de aquí a mil años que ahora mismo. Y lo sorprendente es que son nuestros. Nadie puede patentar una fórmula matemática, es nuestra para que podamos compartirla. No hay nada en este mundo tan profundo y exquisito y a la vez tan disponible. Que una cantidad tan grande de conocimiento exista es casi increíble. Es demasiado precioso como para dárselo a unos «pocos iniciados». Nos pertenece a todos.

Una de las funciones clave de las matemáticas es la de ordenar la información. Esto es lo que distingue los trazos de pincel de Van Gogh de una simple mancha de pintura. Con el advenimiento de la impresión 3D, la realidad que conocemos está sufriendo una transformación radical: todo migra de la esfera de lo físico a la de la información y los datos. Pronto seremos capaces de convertir información en objetos bajo demanda con impresoras 3D de la misma manera en que convertimos un archivo PDF en un libro o un archivo MP3 en música. En este nuevo mundo, el papel de los matemáticos será incluso más importante: como manera de ordenar y organizar la información, y como medio de facilitar la conversión de esta en realidad física.

En este libro describiré una de las ideas más grandes que han salido de los matemáticos en los últimos cincuenta años: el Programa Langlands, considerado por muchos la Teoría de la Gran Unificación de las matemáticas. Es una teoría fascinante que teje una telaraña de sensacionales conexiones entre campos matemáticos que a primera vista parecen encontrarse a años luz de distancia: álgebra, geometría, teoría de números, análisis y física cuántica.

Si vemos esos campos como continentes en el mundo oculto de las matemáticas, el Programa Langlands constituiría el dispositivo definitivo de teletransporte, capaz de llevarnos instantáneamente de uno a otro, de ida y de vuelta.

Impulsado a finales de la década de 1960 por Robert Langlands, el matemático que ocupa actualmente el despacho de Albert Einstein en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, el Programa Langlands hunde sus raíces en una revolucionaria teoría matemática de la simetría. Sus cimientos los puso, hace dos siglos, un prodigio francés antes de morir en un duelo, a los veinte años. Posteriormente, un nuevo y sorprendente descubrimiento, que no sólo llevó a la prueba del último teorema de Fermat, sino que revolucionó el modo en que concebimos los números y las ecuaciones, lo enriqueció. Otra reflexión más profunda fue que las matemáticas poseen su propia piedra Rosetta[i], y que rebosan de misteriosas analogías y metáforas. Al seguir estas analogías como si se tratase de valles en el mundo encantado de las matemáticas, las ideas del Programa Langlands se extendieron a los reinos de la geometría y de la física cuántica, creando orden y armonía donde antes había un aparente caos.

Quiero explicar todo esto para mostrar el lado de las matemáticas que rara vez sale a la luz: el de la inspiración, las ideas profundas, la de las revelaciones sorprendentes. Las matemáticas son una manera de romper las barreras de lo convencional, una expresión de imaginación desatada en la búsqueda de la verdad. Georg Cantor, creador de la teoría del infinito, escribió que «lo esencial de las matemáticas radica en su libertad». Las matemáticas nos enseñan a analizar rigurosamente la realidad, a estudiar los hechos, a seguirlos a donde quiera que lleven. Nos liberan de dogmas y prejuicios, nutren nuestra capacidad de innovación. De este modo nos proporcionan herramientas que la trascienden a ella misma.

Estas herramientas se pueden usar para bien o para mal, lo que nos obliga a enfrentarnos con los efectos de las matemáticas en el mundo real. Por ejemplo, la crisis económica mundial tuvo su causa por el uso extendido de modelos matemáticos inadecuados en los mercados financieros. Muchos de los que

---

[i] La piedra Rosetta es una estela inscrita en piedra (granodiorita) en la que se expone un decreto publicado en la ciudad egipcia de Menfis el año 196 a. C. por el faraón Ptolomeo V. Al estar inscrita en jeroglífico, demótico y griego antiguo, sirvió para establecer las primeras correspondencias que llevaron a comprender el lenguaje jeroglífico, tarea que completó Jean-François Champollion en 1822. (*N. del t*.).

tomaron las decisiones no comprendían plenamente estos modelos debido a su analfabetismo matemático, pero de todos modos los usaron, arrogantes, motivados por la codicia… hasta que esta práctica casi hundió todo el sistema. Se aprovechaban de la injusta asimetría en el acceso a la información, con la confianza de que nadie descubriría su fraude porque nadie sentía el deseo de preguntar, tampoco, cómo funcionaban esos modelos matemáticos. Quizá, si más gente hubiera sabido cómo operaban esos modelos, cómo funcionaba en realidad el sistema, no nos habrían engañado durante tanto tiempo.

A modo de otro ejemplo, piense en esto: en 1996, una comisión nombrada por el gobierno de Estados Unidos se reunió en secreto y alteró la fórmula para el Índice de Precios al Consumo, la manera de medir la inflación que determina los tramos de impuestos, Seguridad Social, Medicare [ii] y otros pagos indexados.

Afectó a decenas de millones de estadounidenses, pero hubo poco debate acerca de la nueva fórmula y sus consecuencias. Y recientemente ha habido otro intento de explotar esta arcana fórmula como puerta trasera de la economía estadounidense.[1]

En una sociedad matemáticamente instruida se efectuarían muchos menos de esos tratos secretos. Las matemáticas son iguales a rigor más integridad intelectual por fiabilidad en los datos. Todos deberíamos tener acceso al conocimiento matemático y a las herramientas necesarias para protegernos de decisiones arbitrarias tomadas por los poderosos en un mundo cada vez más dominado por las matemáticas. Sin matemáticas, no hay libertad.

* * * *

Las matemáticas son parte de nuestra herencia cultural, tanto como las artes

---

[ii] Medicare es un programa de seguridad social administrado por el gobierno de Estados Unidos y que proporciona cobertura médica a los mayores de sesenta y cinco años o personas discapacitadas por diversos motivos. Opera como un seguro. (*N. del t*.).

plásticas, la literatura y la música. Como humanos, estamos hambrientos de cosas nuevas, de alcanzar nuevos significados, de comprender mejor el universo y nuestro lugar en él. Lamentablemente, no podemos descubrir un nuevo continente, como Colón, ni ser los primeros en pisar la Luna. Pero ¿y si le dijera que no es necesario navegar por los océanos o volar por el espacio para descubrir las maravillas del mundo? Están aquí mismo, imbricadas en nuestra realidad cotidiana. En cierto sentido, dentro de nosotros. Las matemáticas dirigen el flujo del universo, se agazapan tras sus formas y curvas, sujetan las riendas de todo, desde los diminutos átomos a las estrellas más grandes.

Este libro constituye una invitación a ese rico y deslumbrante mundo. Lo he escrito para lectores sin ningún conocimiento matemático previo. Si cree que las matemáticas son difíciles, que no lo va a entender, si está aterrorizado por las matemáticas, pero al mismo tiempo siente curiosidad por ver si hay algo que valga la pena saber… entonces este libro es para usted.

Existe la falacia, muy extendida, de que hay que estudiar matemáticas durante años para apreciarlas. Hay incluso quienes creen que la mayor parte de las personas tiene una dificultad de aprendizaje innata en cuanto a las matemáticas. No estoy de acuerdo: la mayoría de nosotros hemos oído hablar, y poseemos al menos cierto conocimiento rudimentario, de temas como el Sistema Solar, los átomos y las partículas elementales, la doble hélice del ADN y mucho más, sin necesidad de estudiar física ni biología. Y a nadie sorprende que ideas tan sofisticadas formen parte de nuestra cultura, nuestra consciencia colectiva. De igual manera, todo el mundo puede comprender los conceptos e ideas matemáticas clave, si se explican de la manera adecuada. Para ello no es necesario estudiar muchos años de matemáticas; en muchos casos podemos saltarnos tediosos pasos e ir directamente al grano.

El problema es que mientras que todo el mundo, generalizando, habla continuamente de planetas, átomos y ADN, lo más seguro es que nadie le haya hablado a usted de las fascinantes ideas de las modernas matemáticas, como

los grupos de simetrías, los novedosos sistemas numéricos en que 2 más 2 no siempre son 4 o bellas formas geométricas como las superficies de Riemann. Es como si siguieran enseñándole un gatito y le dijeran que es a eso a lo que se parece un tigre. Pero, en realidad, el tigre es un animal completamente distinto. Se lo mostraré en todo su esplendor y será capaz de apreciar esa «terrible simetría» de la que elocuentemente hablaba William Blake.[iii]

Que no se me malinterprete: leer sólo este libro no le convertirá en un matemático. Tampoco abogo por que todo el mundo se haga matemático. Piense más bien de esta manera: aprender unos cuantos acordes le permitirá tocar un montón de canciones con la guitarra. No le convertirá en el mejor guitarrista del mundo, pero enriquecerá su vida. En este libro le enseñaré los acordes de las matemáticas modernas, que le han ocultado. Y le prometo que esto enriquecerá su vida.

Uno de mis profesores, el gran Israel Gelfand, solía decir: «La gente cree que no entiende las matemáticas, pero en realidad el problema es cómo se las explican. Si le preguntas a un borracho qué número es mayor, 2/3 o 3/5, no será capaz de decírtelo. Pero si replanteas la pregunta: ¿qué es mejor: 2 botellas de vodka para 3 personas o 3 botellas de vodka para 5 personas? Te dirá claramente: 2 botellas para 3 personas, por supuesto».

Mi objetivo es explicarle estos temas de manera que puedan comprenderlos.

También hablaré de mi experiencia de haber crecido en la antigua Unión Soviética, donde las matemáticas representaron una avanzadilla de libertad frente a un régimen opresivo. Se me denegó la entrada en la Universidad Estatal de Moscú por las leyes discriminatorias de la antigua Unión Soviética. Me cerraron las puertas en las narices. Yo era un marginado. Pero no me rendí. Me colaba en la universidad para asistir a lecciones y seminarios. Leía libros de

---

[iii] Se refiere al poema «El tigre», del poeta, artista y agitador político William Blake (1757–1827):
«Tigre, tigre que brillas luminoso
en los bosques de la noche
¿qué mano inmortal, qué ojo
ideó tu terrible simetría?»
(traducido al castellano como *Canciones de inocencia y de experiencia*, Cátedra, 1987). (*N. del t.*).

matemáticas por mi cuenta, a veces muy avanzada la noche. Y al final, fui capaz de trampear al sistema. No me dejaron entrar por la puerta principal, así que entré por una ventana. Cuando uno está enamorado, ¿qué puede detenerlo?

Dos brillantes matemáticos me acogieron bajo su ala protectora y se convirtieron en mis mentores. Guiado por ellos, comencé a realizar investigación matemática. Aún era un estudiante universitario, pero comenzaba ya a probar los límites de lo desconocido. Fue la época más fascinante de mi vida, y lo hice incluso sabiendo que la política discriminatoria de la Unión Soviética nunca me permitiría tener un trabajo como matemático allí.

Pero había una sorpresa aguardándome: alguien pasó de contrabando mis primeros artículos académicos y me hice conocido, y con veintiún años me invitaron en calidad de profesor visitante a la Universidad de Harvard. Milagrosamente, al mismo tiempo la *perestroika* levantaba el telón de acero en la Unión Soviética, y permitía a sus ciudadanos viajar al extranjero. De modo que allí estaba yo, profesor en Harvard pese a no tener un doctorado, trampeando nuevamente al sistema. Continué con mi camino académico, que me llevó a investigar en los límites del Programa Langlands, y me permitió tomar parte en algunos de los avances más importantes en esta área durante los últimos veinte años. En las páginas que siguen, explicaré los espectaculares resultados obtenidos por científicos brillantes, así como lo que sucedía entre bastidores.

* * * *

Este libro trata también de amor. Una vez tuve la visión de un matemático que descubría la «fórmula del amor». Se convirtió en la premisa de una película, *Rites of Love and Math*, de la que hablaré más adelante en el libro. Cada vez que exhibo la película alguien pregunta: «¿existe esa fórmula?».

Mi respuesta es: «todas y cada una de las fórmulas que creamos son una fórmula de amor». Las matemáticas son fuente de un conocimiento profundo y atemporal, que llega al corazón de las cosas y nos une a través de culturas, continentes y siglos. Mi sueño es que todos seamos capaces de ver, apreciar y maravillarnos ante la mágica belleza y la exquisita armonía de estas ideas, fórmulas y ecuaciones, porque ello proporcionará mucho más significado a nuestro amor por este mundo y por el prójimo.

Guía para el lector

Me he esforzado para presentar, en este libro, los conceptos matemáticos de la manera más elemental e intuitiva posible. Aun así, me doy cuenta de que algunas partes del libro son más densas en conceptos matemáticos (especialmente algunos aspectos de los capítulos 8, 14, 15 y 17). *Es perfectamente lícito saltarse* las partes que parezcan confusas o tediosas en una primera lectura (a menudo yo mismo lo hago). Si regresa más tarde a ellas, con nuevos conocimientos adquiridos, puede que le resulten más fáciles de seguir. Pero, por norma general, no es necesario para poder seguir lo que viene a continuación.

Quizá un argumento mucho más importante es que es perfectamente válido que algo no quede claro. Así es como me siento el 90% de las veces que trabajo en matemáticas, así que… ¡bienvenido a mi mundo! El sentimiento de confusión (incluso, a veces, frustración) es parte esencial de ser un matemático. Pero vea el lado positivo: ¡qué aburrida sería la vida si pudiéramos comprender todo acerca de ella con poco o ningún esfuerzo! Lo que hace que las matemáticas sean tan interesantes es nuestro deseo de superar esta confusión, de comprender, de alzar el velo de lo desconocido. Y el sentimiento de triunfo personal cuando comprendemos algo hace que todo merezca la pena.

En este libro intento centrarme en la imagen general y en las conexiones entre diferentes conceptos y distintas ramas de las matemáticas, no en los detalles técnicos. He relegado un tratamiento más en profundidad a las notas, que contienen también referencias y sugerencias bibliográficas. Sin embargo, aunque las notas pueden mejorar la comprensión, se pueden saltar sin problemas (al menos, en una primera lectura).

He intentado minimizar el empleo de fórmulas, y he optado, en la medida de lo posible, por explicaciones verbales. Siéntase libre de pasar por encima de las fórmulas siempre que aparezcan.

Una advertencia en cuanto a la terminología matemática: mientras escribía este libro descubrí, para mi sorpresa, que ciertos términos que los matemáticos usamos de una manera específica significan, en realidad, algo completamente diferente para los no matemáticos. Términos como correspondencia, representación, composición, lazo, variedad y teoría. Siempre que he detectado este problema he incluido una explicación. También, cuando me ha sido posible, he cambiado términos matemáticos poco comprensibles por otros con un significado más transparente (por ejemplo, he escrito «relación Langlands» en lugar de «correspondencia Langlands»). Puede resultarle útil consultar el Glosario y el Índice siempre que una palabra no le resulte del todo clara.

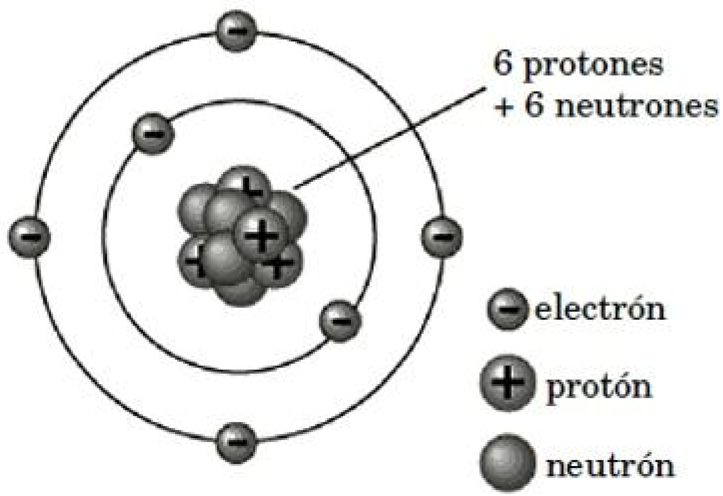
Puede acudir a mi página web (http://edwardfrenkel.com) para actualizaciones y material de apoyo, y enviarme un correo electrónico contándome lo que opina del libro (la dirección consta en la página web). Sus aportaciones serán bien recibidas.

Capítulo 1
Una bestia misteriosa

¿Cómo se convierte uno en matemático? Puede pasar de muchas maneras. Déjeme explicarle cómo me ocurrió a mí.

Puede que le sorprenda, pero cuando estaba en el colegio odiaba las matemáticas. Bueno, quizá «odiar» sea una palabra muy fuerte. Dejémoslo en que no me gustaban. Pensaba que eran aburridas. Podía hacer mis deberes, es cierto, pero no comprendía por qué los estaba haciendo. La materia que se trataba en clase me parecía irrelevante y sin sentido. Lo que realmente me entusiasmaba era la Física, especialmente la cuántica. Devoraba los libros de divulgación al respecto que caían en mis manos. Yo nací en Rusia, donde ese tipo de libros era fácil de encontrar.

Me fascinaba el mundo cuántico. Incluso desde el alba de los tiempos, filósofos y científicos habían soñado con describir la naturaleza fundamental del universo. Algunos incluso lanzaron la hipótesis de que toda la materia estaba constituida por diminutas partículas llamadas «átomos». A principios del siglo XX se demostró que los átomos existían, pero casi al mismo tiempo, los científicos descubrieron que se podían dividir en partículas más pequeñas. Resultó que cada átomo constaba de un núcleo central con electrones en órbita en torno a él. El núcleo, a su vez, consistía en protones y neutrones, como se ve en el diagrama inferior.[2]



Átomo de carbono

¿Y qué había de los protones y neutrones? Los libros de divulgación que yo leía me decían que estaban compuestos de las partículas elementales llamadas «quarks».

Me gustaba el nombre, quarks, y sobre todo la manera en que se llegó a él. El físico que inventó estas partículas, Murray Gell-Mann, tomó el nombre del libro de James Joyce *Finnegan's Wake*, en la que hay un poema satírico que dice así:

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark[iv]

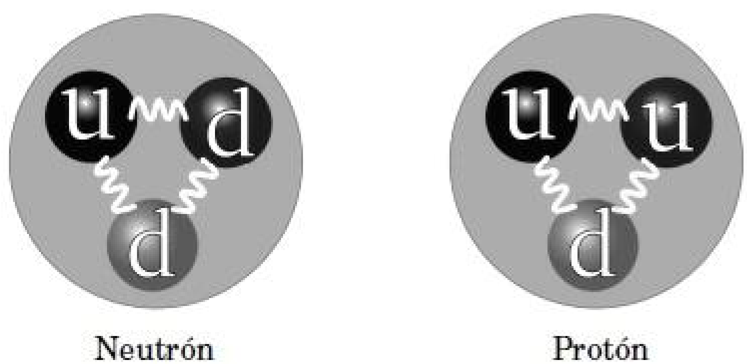
Pensé que estaba muy bien que un físico nombrara una partícula a partir de una novela, especialmente una tan compleja y poco trivial como *Finnegan's Wake*. Yo tendría unos trece años, pero por entonces ya sabía que se suponía que los científicos eran criaturas ermitañas y poco sociables, tan implicados en su trabajo que carecían de interés en otros aspectos de la vida, como las

---

[iv] No sólo el poema, sino toda la novela *Finnegan's Wake* es casi intraducible al español: prueba de ello es que a septiembre de 2014 no existe ni una sola traducción completa a nuestro idioma. *Finnegan's Wake* está considerado por muchos como el libro más complejo de la historia en lengua inglesa. En el caso que nos ocupa, Gell-Mann escogió el nombre porque sonaba como la primera palabra que había pensado para las partículas (*kwork*) y porque estas aparecían, como en el poema, de tres en tres. (*N. del t.*).

Humanidades o las Artes. No era así. Yo tenía muchos amigos, me gustaba leer y me interesaban muchas más cosas además de la ciencia. Me gustaba jugar al fútbol y pasaba horas pateando el balón con mis amigos. Más o menos por la misma época descubrí los pintores impresionistas (gracias a un gran libro acerca del impresionismo, que hallé en la biblioteca de mis padres). Van Gogh era mi favorito. Subyugado por sus obras, incluso intenté pintar. Todos estos intereses me hacían dudar acerca de si realmente estaba destinado a ser científico. Así que cuando leí que Gell-Mann, un gran físico, ganador del premio Nobel, tenía varios intereses (no sólo Literatura; también la Lingüística, la Arqueología, etc.) me sentí muy feliz.

Según Gell-Mann, hay dos tipos diferentes de quarks, *up* («arriba») y *down* («abajo»), y las diferentes mezclas entre ellos dan a los neutrones y protones sus características. Un neutrón está compuesto de dos quarks «abajo» y uno «arriba», y un protón, de dos quarks «arriba» y uno «abajo», como se ve en el gráfico.[3]

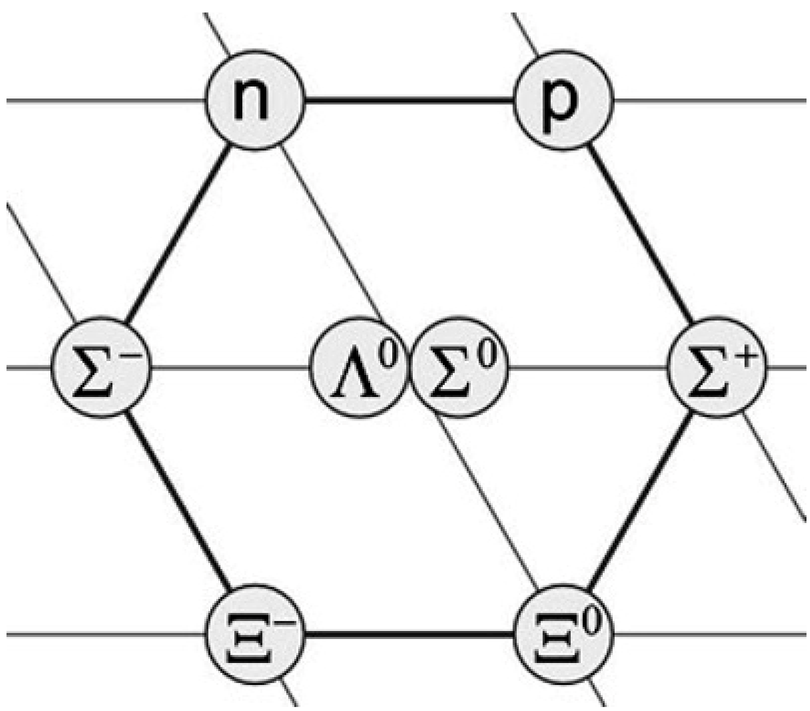


Hasta ahí todo estaba claro. Pero cómo llegaron los físicos a la conclusión de que los protones y neutrones no eran partículas indivisibles, sino que estaban compuestos de trozos más pequeños, era más complejo.

La historia dice que a finales de la década de 1950 se descubrió una gran cantidad de partículas aparentemente elementales, los hadrones. Tanto los

protones como los neutrones son hadrones, y, evidentemente, desempeñan un papel importantísimo en nuestra vida cotidiana como «ladrillos» básicos de la materia. Con respecto a los demás hadrones..., bueno, nadie tenía ni idea de para qué existían («quién los había encargado», en palabras de un físico). Había tantos diferentes que el influyente físico Wolfgang Pauli aseguraba, en broma, que la Física se había convertido en Botánica. Los físicos necesitaban desesperadamente dominar los hadrones, hallar los principios subyacentes que gobiernan su comportamiento y que explicarían su descontrolada proliferación. Gell-Mann, y, de modo independiente, Yuval Ne'eman, propusieron un nuevo esquema de clasificación. Ambos demostraron que se podía dividir a los hadrones en pequeñas familias, cada una compuesta por ocho o diez partículas. Las llamaron octetes y decupletes. Dentro de cada familia, las partículas tenían propiedades similares.

En los libros de divulgación que yo leía por aquel entonces, encontraba diagramas de octetes como este:



En este caso, el protón corresponde a *p*, el neutrón a *n* y hay otras seis partículas con nombres extraños que se representan mediante letras griegas. Pero ¿por qué 8 y 10, y no 7 y 11, por poner un ejemplo? En los libros que leía no hallaba una respuesta satisfactoria. Mencionaban la misteriosa idea de Gell-Mann denominada «camino óctuple» (que hacía referencia al «Noble camino óctuple» de Buda). Pero nunca intentaban aclarar de qué iba realmente todo eso. Esta falta de explicaciones me dejó completamente insatisfecho. Los aspectos clave de la historia permanecían ocultos. Quería desentrañar ese misterio, pero no sabía cómo.

Cosas del azar, recibí ayuda de un amigo de la familia. Crecí en una pequeña ciudad industrial llamada Kolomna, de ciento cincuenta mil habitantes, a unos cien kilómetros de Moscú (un par de horas en tren). Mis padres trabajaban como ingenieros en una compañía que fabricaba maquinaria pesada. Kolomna es una vieja ciudad situada en la confluencia de dos ríos, fundada en 1177 (sólo treinta años después de Moscú). Aún posee algunas bellas iglesias y la muralla, que da fe de su historia. Pero no es, para ser precisos, un centro educativo o intelectual. Tan sólo había una pequeña universidad en ella, que formaba a futuros profesores de primaria. Uno de sus profesores, un matemático llamado Yevgueni Yevguénievich Petrov, sin embargo, era un antiguo amigo de mis padres. Un día mi madre se lo encontró en la calle tras un largo tiempo sin verse, y se pusieron a conversar. A mi madre le gustaba hablarles a sus amigos de mí, así que acabé saliendo en la conversación. Al oír que me interesaba la ciencia, Yevgueni Yevguénievich le dijo:

—He de conocerlo. He de intentar convertirlo a las matemáticas.

—Oh, no —respondió mi madre—. No le gustan las matemáticas. Dice que son aburridas. Quiere estudiar física cuántica.

—No hay problema —le respondió Yevgueni Yevguénievich—; creo que sabré cómo hacerle cambiar de opinión.

Se concertó un encuentro. Yo no estaba especialmente entusiasmado por ello, pero en cualquier caso fui a visitar a Yevgueni Yevguénievich a su oficina.

Yo estaba a punto de cumplir quince años y estaba acabando noveno curso, el penúltimo año de escuela preparatoria (era un año más joven que mis compañeros porque me había saltado sexto). Por aquella época recién entrado en la cuarentena, Yevgueni Yevguénievich era un tipo amistoso y modesto. Con gafas y barba de tres días, era exactamente como me imaginaba que debía ser un matemático, y pese a todo había algo cautivador en la sagaz mirada de sus grandes ojos, que hablaban de una curiosidad desmedida por todo.

Resultó que Yevgueni Yevguénievich tenía un inteligente plan para convertirme a las matemáticas. En cuanto entré en su oficina me dijo:

—Me han contado que te interesa la física cuántica. ¿Has oído hablar del camino óctuple de Gell-Mann y del modelo de quarks?

—Sí, he leído sobre el tema en varios libros de divulgación.

—Pero ¿sabes cuál fue la base para ese modelo? ¿Cómo llegó a esa idea?

—Bueno...

—¿Has oído hablar del grupo SU(3)?

—¿SU qué?

—¿Cómo esperas comprender el modelo de quarks si no sabes qué es el grupo SU(3)?

Sacó un par de libros de las estanterías, los abrió y me enseñó páginas con fórmulas. Yo veía los conocidos diagramas de octetes, como el de la gráfica anterior, pero estos no eran sólo gráficos bonitos: eran parte de lo que parecía una explicación coherente y detallada.

Aunque no entendía nada de aquellas fórmulas, me quedó claro al instante que contenían las respuestas que había estado buscando. Fue un momento de epifanía. Me quedé hipnotizado por lo que veía y oía; me tocó algo que nunca antes había experimentado. Era incapaz de expresarlo con palabras, pero sentía la energía, el entusiasmo que uno siente al escuchar una composición musical o contemplar un cuadro que le causan una impresión inolvidable. Sólo podía pensar: «¡Ostras!».

—Seguro que piensas que las matemáticas son eso que te enseñan en la

escuela —dijo Yevgueni Yevguénievich.

Movió la cabeza.

—No, no. Es de esto —señaló las fórmulas del libro— de lo que van realmente las matemáticas. Y si de verdad quieres comprender la física cuántica, es aquí donde debes comenzar. Gell-Mann predijo los quarks empleando una bella teoría matemática. En realidad, se trató de un descubrimiento matemático.

—Pero ¿cómo voy a siquiera comenzar a comprender todo esto?

Tenía un aspecto bastante temible.

—No te preocupes. Lo primero que tienes que aprender es el concepto de grupo de simetrías. Esa es la idea principal. Una gran parte de las matemáticas, así como de la Física teórica, se basan en ello. Aquí hay un par de libros que quiero pasarte. Comienza leyéndotelos y marca las frases que no comprendas. Podemos encontrarnos aquí semanalmente y hablar de ello.

Me pasó un libro acerca de grupos de simetrías y un par más sobre otros temas: acerca de los llamados números *p*-ádicos (un sistema de numeración radicalmente distinto a aquel a que estamos acostumbrados) y de topología (el estudio de las propiedades fundamentales de las formas geométricas). Yevgueni Yevguénievich tenía un gusto impecable: halló la mezcla de temas perfecta que me permitiría ver a esta misteriosa bestia (las *Matemáticas*) desde diferentes perspectivas, y entusiasmarme con ellas.

En la escuela estudiábamos cosas como ecuaciones de segundo grado, un poco de cálculo, algo de geometría euclidiana básica y trigonometría. Había dado por sentado que todas las matemáticas giraban en torno a estos temas, que quizá los problemas se hacían más complicados pero permanecían en el mismo marco general que yo conocía. Pero los libros que me prestó Yevgueni Yevguénievich me ofrecían una mirada a un mundo completamente diferente, cuya existencia yo ni siquiera imaginaba.

Me convirtió al instante.

Capítulo 2
La esencia de la simetría

Para la mayoría de la gente, la matemática trata sobre números. Imaginan a los matemáticos como personas que se pasan el día procesando números: números grandes y números más grandes aún, con nombres exóticos. Yo también lo pensaba..., al menos, hasta que Yevgueni Yevguénievich me presentó los conceptos e ideas de las matemáticas modernas. Uno de ellos resultó ser clave para el descubrimiento de los quarks: el concepto de simetría.
¿Qué es la simetría? Todos comprendemos intuitivamente qué es: la reconocemos cuando la vemos. Cuando pido a la gente que me dé un ejemplo de simetría, suelen mencionar mariposas, copos de nieve o el cuerpo humano.


Foto de K. G. Libbrecht



Pero si les pregunto qué significa que un objeto determinado es simétrico, dudan.
Yevgueni Yevguénievich me la explicó así:
—Observemos esta mesa cuadrada y esta mesa redonda —dijo, señalándome las dos mesas de la oficina—. ¿Cuál es más simétrica?
—La redonda, claro, ¿no es obvio?
—Pero ¿por qué? Ser matemático significa que uno no da nada por obvio, sino que intenta razonarlo. Muy a menudo te darás cuenta de que la respuesta más obvia es errónea.

Al ver mi cara de confusión, Yevgueni Yevguénievich me dio una pista:

—¿Cuál es la propiedad de la mesa redonda que la hace más simétrica?

Pensé en el tema durante un rato y de repente me di cuenta:

—Supongo que la simetría de un objeto tiene que ver con que mantenga su forma y su posición cuando se le aplican cambios.

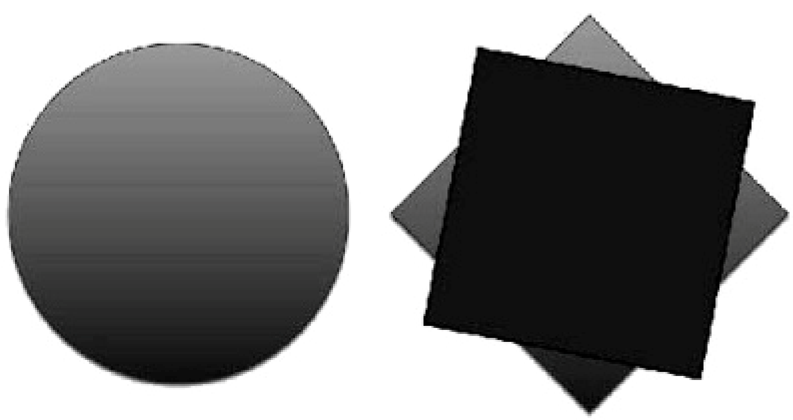
Yevgueni Yevguénievich asintió.

—Efectivamente. Veamos todas las posibles transformaciones de una mesa que conservan su forma y su posición —dijo—. En el caso de la mesa redonda...

Le interrumpí:

—Cualquier rotación en torno a su centro valdrá. Tendremos la misma mesa en la misma posición. Pero si aplicamos una rotación arbitraria a una mesa cuadrada, tendremos una mesa cambiada de posición. Sólo las rotaciones de 90 grados y sus múltiplos la mantendrían sin cambios en su aspecto.

—¡Exacto! Si te fueras de la oficina durante un minuto y yo girara la mesa redonda en cualquier ángulo, no notarías la diferencia. Pero si hiciera lo mismo con la mesa cuadrada, lo verías, a menos que yo la girara 90, 180 o 270 grados.



Si aplicamos a una mesa redonda una rotación de un ángulo cualquiera no cambia, pero si a una mesa cuadrada le aplicamos una rotación de un ángulo que no sea múltiplo de 90, sí cambia (ambas vistas desde arriba).

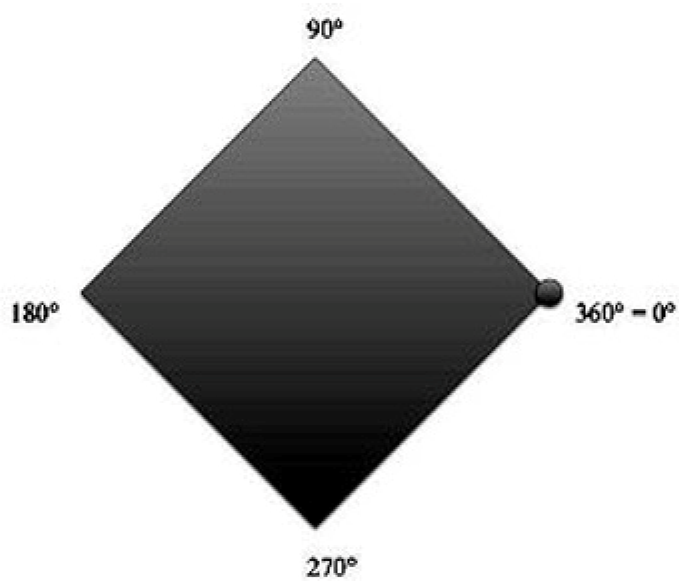
Continuó:

—A estas transformaciones se les denomina simetrías. De modo que, como ves, la mesa cuadrada tiene cuatro simetrías de rotación, mientras que la mesa redonda tiene muchas más: en realidad, infinitas más. Por eso decimos que la mesa redonda es más simétrica.

Tenía mucho sentido.

—Esta es una observación bastante directa —continuó Yevgueni Yevguénievich—. No es necesario ser matemático para ver esto. Pero si eres un matemático, te harás la siguiente pregunta: ¿cuáles son *todas* las posibles simetrías de un objeto?

—Examinemos el caso de la mesa cuadrada. Sus simetrías[4] son estas cuatro rotaciones alrededor del centro de la mesa: de 90 grados, de 180 grados, de 270 grados y de 360 grados, en el sentido contrario a las agujas del reloj.[5] Un matemático diría que *el conjunto* de simetrías de la mesa cuadrada consiste en cuatro elementos, que se corresponden a los ángulos 90, 180, 270 y 360. Cada rotación lleva a una de las esquinas (marcada con un círculo en la figura) a uno de los cuatro rincones.



—Una de estas rotaciones es especial: la rotación a 360 grados es la misma que la rotación a 0 grados, es decir, que ninguna rotación. Se trata de una simetría especial porque, en realidad, no hace nada a nuestro objeto: cada punto de la mesa acaba exactamente en la misma posición en que estaba al principio. La llamamos *identidad*.[6]

Téngase en cuenta que una rotación en cualquier ángulo superior a 360 grados equivale a una rotación de un ángulo entre 0 y 360 grados. Por ejemplo, una rotación de 450 grados es lo mismo que una rotación de 90 grados, porque

$$450 = 360 + 90.$$

Es por eso por lo que sólo tenemos en cuenta las rotaciones en ángulos de entre 0 y 360 grados.

Aquí llega la observación crucial: si aplicamos dos rotaciones de la lista (90, 180, 270, 360 grados) una después de la otra, obtendremos otra rotación de la misma lista. Llamamos a esta nueva simetría una *composición* de las dos.

Como es obvio, cualquiera de las dos simetrías conserva la mesa: por tanto, la composición de ambas también la conserva. Ergo, esta composición también ha de ser una simetría. Por ejemplo, si rotamos la mesa 90 grados y luego otros 180 grados, el resultado neto de la operación es una rotación de 270 grados.

Veamos qué ocurre con la mesa al aplicar estas simetrías. Tras la rotación de 90 grados en el sentido contrario a las agujas del reloj, la esquina de la derecha (la que está marcada con un punto en la imagen anterior) pasará a ser la esquina superior. Luego, aplicamos una rotación de 180 grados, de modo que la esquina superior pasa a ser la esquina de la parte inferior. El resultado final será que la esquina de la derecha pasará a ser la esquina de la parte inferior. Esto es el resultado de una rotación de 270 grados en sentido contrario a las agujas del reloj.

He aquí otro ejemplo:

$$90º + 270º = 0º$$

Al rotar 90 grados y luego 270 grados más, obtenemos una rotación total de 360 grados. Pero el efecto de una rotación de 360 grados es el mismo que el de una rotación de 0 grados, como hemos visto antes. Esta es la «identidad».

En otras palabras: la segunda rotación de 270 grados deshace la rotación inicial de 90 grados. Esta es, en realidad, una propiedad importante: toda simetría puede deshacerse, es decir: para toda simetría *S* existe otra simetría *S'* tal que su composición sea la identidad. A esta *S'* se le llama el inverso de la simetría *S*. De modo que vemos que la rotación de 270 grados es el inverso de la rotación de 90 grados. De igual manera, el inverso de una rotación de 180 grados es la misma rotación de 180 grados.

Ya vemos que lo que parecía una sencilla agrupación de simetrías de la mesa cuadrada (las rotaciones de 90, 180, 270 y 360 grados) en realidad tiene una enorme estructura interna, o reglas de cómo pueden interactuar los miembros del conjunto.

En primer lugar, podemos componer dos simetrías cualesquiera (es decir, aplicarlas una tras la otra).

En segundo lugar, existe una simetría especial, la identidad. En nuestro ejemplo, es la rotación de 0 grados. Si la componemos con cualquier otra simetría, obtenemos nuevamente esa simetría. Por ejemplo:

$$90º + 0º = 90º, 180º + 0º = 180º, \text{etc.}$$

En tercer lugar, para toda simetría *S* existe una simetría inversa *S'* tal que la composición de *S* y *S'* sea la identidad.

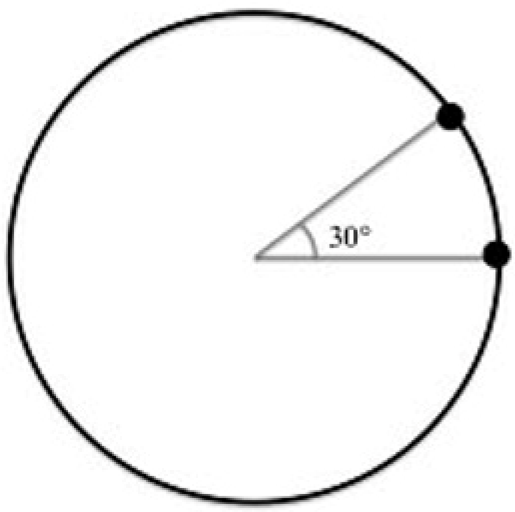
Y ahora llegamos al punto esencial: el conjunto de rotaciones, junto con estas tres estructuras, constituye un ejemplo de lo que los matemáticos denominan un *grupo*.

Las simetrías de cualquier otro objeto también constituyen un grupo, que en

general tiene más elementos: posiblemente, infinitos.[7]

Veamos cómo funciona esto en el caso de la mesa redonda. Ahora que ya tenemos cierta experiencia, vemos fácilmente que el conjunto de todas las simetrías de la mesa redonda es el conjunto de todas sus posibles rotaciones (no sólo los múltiplos de 90 grados) y podemos visualizarlo como el conjunto de todos los puntos de la circunferencia.

Cada punto de esta circunferencia corresponde a un ángulo de entre 0 y 360 grados, y que representa la rotación de la mesa en ese ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj. Sobre todo, hay un punto especial que corresponde a una rotación de 0 grados. Está marcado en el diagrama de abajo, junto a otro punto correspondiente a una rotación de 30 grados.



Pero no deberíamos pensar en los puntos de esta circunferencia como puntos de la mesa redonda. Más bien, cada punto de la circunferencia representa una rotación determinada de la mesa redonda. Fíjese en que la mesa no tiene un punto preferido, pero nuestro círculo sí: el que corresponde a una rotación de 0 grados.[8]

Veamos ahora si las tres estructuras antes mencionadas se pueden aplicar al conjunto de puntos de la circunferencia.

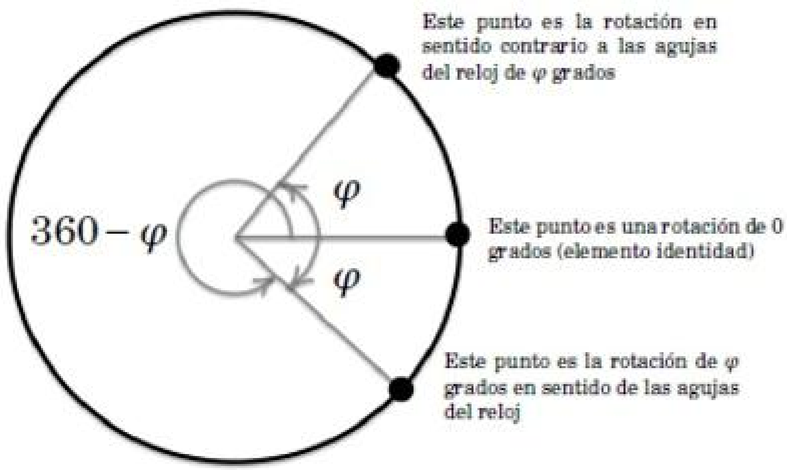
En primer lugar, la composición de dos rotaciones, en los ángulos φ_1 y φ_2, es la rotación de la suma de ángulos $\varphi_1 + \varphi_2$. Si $\varphi_1 + \varphi_2$ es mayor que 360 grados, sencillamente restamos 360 grados. En matemáticas, a esto se le llama *suma de módulo* 360. Por ejemplo, si $\varphi_1 = 195^o$ y $\varphi_2 = 250^o$, la suma de los dos ángulos es de 445º, y una rotación de 445º es igual que una rotación de 85º.

De modo que en el grupo de rotaciones de la mesa redonda, tenemos que

$$195º + 250º = 85º.$$

En segundo lugar, hay en la circunferencia un punto especial que corresponde a una rotación de 0 grados. Es el elemento identidad de nuestro grupo.

En tercer lugar, el inverso de la rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de φ grados es la rotación en sentido contrario a las agujas del reloj de (360-φ) grados, o, de manera equivalente, a la rotación en sentido de las agujas del reloj de φ grados (véase figura).



Así hemos descrito el grupo de rotaciones de la mesa redonda. Le llamaremos *grupo circular*. A diferencia del grupo de simetrías de la mesa cuadrada, que tiene cuatro elementos, este grupo tiene infinitos elementos más porque hay infinitos ángulos entre 0 y 360 grados.

Hemos puesto ahora nuestra intuición acerca de la simetría sobre bases sólidas: en efecto, la hemos convertido en un concepto matemático. En primer lugar, hemos postulado que la simetría de un objeto determinado es una transformación que conserva este objeto y sus propiedades. Y hemos dado un paso decisivo: nos hemos centrado en el conjunto de todas las simetrías posibles de este objeto. En el caso de la mesa cuadrada, este conjunto rotacional consiste en cuatro elementos (rotaciones de ángulos múltiplos de 90

grados); en el caso de una mesa redonda, es un conjunto infinito (todos los puntos de la circunferencia). Finalmente, hemos descrito las precisas estructuras que este conjunto de simetrías posee siempre: se pueden componer dos simetrías cualesquiera para obtener otra simetría; existe la simetría identidad y para toda simetría existe su simetría inversa. La composición de simetrías satisface también la propiedad de asociatividad (descrita en la nota 4). De este modo hemos llegado al concepto matemático de grupo.

Un grupo de simetrías es un objeto abstracto muy diferente del objeto concreto con el que comenzamos. No podemos tocar ni sostener el conjunto de simetrías de una mesa (a diferencia de la propia mesa) pero podemos imaginarlo, dibujar sus elementos, estudiarlo y hablar de él. Todos los elementos de este conjunto abstracto tienen un sentido concreto: representan una transformación puntual de un objeto concreto, su simetría.

> *Las matemáticas tratan del estudio de objetos abstractos y conceptos como estos.*

La experiencia demuestra que la simetría es un principio básico que ejerce de guía para las leyes naturales. Por ejemplo, un copo de nieve tiene una forma hexagonal perfecta porque este es el estado de energía mínima en que las moléculas de agua pueden cristalizar. Las simetrías del copo de nieve son rotaciones en múltiplos de 60 grados, es decir, en 60, 120, 180, 240, 300 y 360 grados (que es la misma que a 0 grados). Además, podemos «voltear» el copo de nieve en torno a cualquiera de los seis ejes correspondientes a esos ángulos. Todas estas rotaciones y giros conservan la forma y posición del copo de nieve, y son, por tanto, sus simetrías.[v]

---

[v] Nótese que una mesa no se puede voltear: eso la dejaría con las patas hacia arriba (no olvidemos que una mesa tiene patas). Si considerásemos un cuadrado o un círculo (sin patas) los volteos serían genuinas simetrías, y deberíamos incluirlas en sus grupos de simetrías.

En el caso de una mariposa, voltearla equivaldría a ponerla patas arriba. Dado que tiene patas en uno de sus lados, voltearla no sería una geometría, estrictamente hablando, de la mariposa. Cuando decimos que una mariposa es simétrica estamos hablando de una versión idealizada de la misma, en la que la parte frontal y la de atrás son idénticas, a diferencia de las de una mariposa real. En tal caso, el volteo, que intercambia las alas de derecha e izquierda, sí que se convierte en una simetría (también podríamos pensar en intercambiar las alas de la mariposa sin darle la vuelta).

Esto nos lleva a un punto importante: hay muchos objetos en la naturaleza cuyas simetrías son aproximadas. Una mesa real no es perfectamente redonda ni cuadrada; una mariposa presenta asimetría entre el lado delantero y el de atrás; un cuerpo humano no es completamente simétrico.

Sin embargo, en estos casos resulta útil pensar en versiones abstractas e idealizadas, o modelos: una mesa perfectamente redonda o cuadrada, o una imagen de una mariposa sin distinción entre ambas caras. Entonces exploramos simetrías de estos objetos idealizados y ajustamos las inferencias que hayamos podido extraer del análisis para que tenga en cuenta las diferencias entre el objeto real y el modelo.

Esto no significa que no apreciemos la asimetría: lo hacemos, y a menudo hallamos belleza en ella. Pero el objetivo principal de la teoría matemática de simetrías no es el estético. Es formular el concepto de simetría en los términos más generales y, por tanto, más abstractos, que se puedan aplicar de manera unificada en diferentes dominios como la geometría, la teoría de números, la física, la química, la biología, etcétera. Una vez enunciamos dicha teoría, podemos hablar de los mecanismos de ruptura de simetría, ver la asimetría emergente, en otras palabras. Por ejemplo, las partículas elementales adquieren masa porque la llamada simetría de gauge a que obedecen (que se tratará en el capítulo 16) se rompe. Esto lo facilita el bosón de Higgs, una escurridiza partícula recientemente descubierta en el Gran Colisionador de Hadrones que hay bajo la ciudad de Ginebra.[9] El estudio de estos mecanismos

de ruptura de simetría proporciona valiosísimas reflexiones acerca del comportamiento de los ladrillos fundamentales de la naturaleza.

* * * *

Me gustaría señalar algunas de las cualidades básicas de la teoría abstracta de simetrías porque constituye un buen ejemplo de por qué las matemáticas son importantes.

La primera es la *universalidad*. El grupo circular no es tan sólo el grupo de simetrías de una mesa redonda, sino también el de todos los demás objetos redondos, como un vaso, una botella, una columna, etcétera. En realidad, decir que un objeto es redondo es lo mismo que decir que su grupo de simetrías es el grupo circular. Es una frase poderosa: vemos que podemos describir un importante atributo de un objeto («que es redondo») describiendo su grupo de simetrías (el círculo). De igual manera, «ser cuadrado» significa que su grupo de simetrías de rotación es el grupo de cuatro elementos arriba descrito. En otras palabras, el mismo objeto abstracto matemático (por ejemplo, el grupo circular) sirve para muchos objetos concretos diferentes, y señala propiedades universales que todos tienen en común (como su cualidad de redondos).[10]

La segunda es la *objetividad*. El concepto de un grupo, por ejemplo, es independiente de nuestra interpretación. Significa lo mismo para todos aquellos que lo aprenden. Evidentemente, para comprenderlo, uno ha de conocer el lenguaje en que se expresa, es decir, el lenguaje matemático. Pero cualquiera puede aprender ese lenguaje. De igual manera, si uno quiere aprender el significado de la frase de René Descartes *Je pense, donc je suis*, necesitará saber francés (al menos, las palabras empleadas en la frase)... pero cualquiera puede aprenderlo. Sin embargo, en el caso de esta última frase, una vez la comprendamos, serán posibles distintas interpretaciones. Además, diferentes personas pueden estar de acuerdo o en desacuerdo con respecto a cualquier interpretación acerca de si la frase es cierta o no. Sin embargo, el

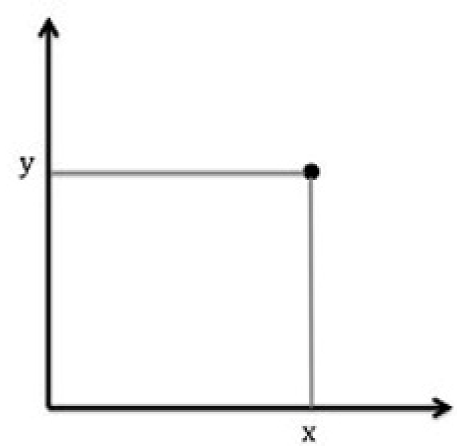
significado de una frase matemática consistente no está sujeto a interpretaciones.[11] Además, su verdad es objetiva. (Por norma general, la verdad de una determinada afirmación puede depender del sistema de axiomas dentro del cual se enmarque. Sin embargo, incluso en ese caso, la dependencia de esos axiomas es también objetiva). Por ejemplo, la afirmación «el grupo de simetrías de una mesa redonda es el círculo» es verdadera para todo el mundo, en cualquier lugar, en cualquier momento. Dicho de otra manera: las verdades matemáticas son las verdades necesarias. Hablaremos más de esto en el capítulo 18.

La tercera cualidad, estrechamente relacionada, es la *resistencia*. No cabe duda de que el teorema de Pitágoras significaba lo mismo para los antiguos griegos que hoy en día para nosotros, y existen todas las razones del mundo para suponer que significará lo mismo para cualquiera en el futuro. De la misma manera, todas las afirmaciones matemáticas de las que hablaremos en este libro serán verdaderas para siempre.

El hecho de que exista un conocimiento objetivo y perdurable (y más aún, de que nos pertenezca a todos) es poco menos que un milagro. Sugiere que los conceptos matemáticos existen en un mundo separado de los mundos físico y mental, al que a veces se llama mundo platónico de las matemáticas: hablaremos de ello en el capítulo final. Aún no comprendemos exactamente qué es y qué impulsa el descubrimiento matemático. Pero es evidente que esta realidad oculta jugará un papel cada vez más grande en nuestras vidas, especialmente con el advenimiento de las nuevas tecnologías informáticas y de la impresión 3D.

La cuarta cualidad es la *relevancia* de las matemáticas con respecto al mundo físico. Por ejemplo, se han realizado grandes progresos en física cuántica en los últimos cincuenta años gracias a la aplicación del concepto de simetría a las partículas elementales y a la interacción entre ellas. Desde este punto de vista, una partícula, como un electrón o un quark, es como una mesa redonda o un copo de nieve, y su comportamiento está determinado en gran manera por sus

simetrías. Algunas de esas simetrías son exactas y otras son aproximadas.
El descubrimiento de los quarks es un ejemplo perfecto de cómo funciona esto. Al leer los libros que Yevgueni Yevguénievich me prestó, aprendí que en la raíz de la clasificación de Gell-Mann y Ne'eman de los hadrones, de la que hablamos en el capítulo previo, había un *grupo de simetrías*. Este grupo ya había sido estudiado previamente por matemáticos, que, sin embargo, no habían previsto ninguna conexión con partículas subatómicas. El nombre matemático del grupo era SU(3). En este caso, «S» y «U» eran las iniciales de *special unitary* («unitario especial»). Este grupo es muy similar en sus propiedades al grupo de simetrías de la esfera, del que hablaremos en el capítulo 10.
Los matemáticos habían descrito las representaciones del grupo SU(3), es decir, las diferentes maneras en que el grupo SU(3) podía actuar como grupo de simetrías. Gell-Mann y Ne'eman notaron las similitudes entre la estructura de esas representaciones y los patrones de hadrones que habían hallado. Emplearon esa información para clasificar los hadrones.
En matemáticas, la palabra «representación» se emplea de una manera determinada, diferente de su uso tradicional. De modo que déjeme detenerme y explicar lo que significa la palabra en este contexto concreto. Posiblemente ayudaría que diera primero un ejemplo. Recuerde el grupo de rotaciones de una mesa redonda del que hablamos antes, el grupo circular. Ahora imagine que extendemos el plano de la mesa en todas las direcciones hasta el infinito. De esta manera obtenemos un objeto matemático abstracto: un plano. Cada rotación del plano de la mesa, en torno a su centro, da lugar a una rotación del plano en torno al mismo punto. De esta manera obtenemos una regla que asigna una simetría de este plano (una rotación) a cada elemento del grupo circular.



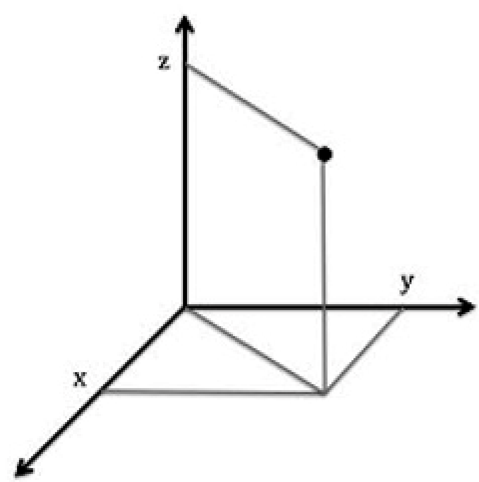
En otras palabras: todos los elementos del grupo circular pueden representarse

mediante una simetría del plano. Por ello, los matemáticos se refieren a este proceso como *una representación* del grupo circular.

El plano es bidimensional porque tiene dos ejes de coordenadas y, por tanto, todo punto tiene dos coordenadas.

Por consiguiente, decimos que hemos construido una «representación bidimensional» del grupo de rotaciones. Significa sencillamente que todos y cada uno de los elementos del grupo de rotaciones se entienden como una simetría del plano.[12]

También hay espacios de más de dos dimensiones. Por ejemplo, el espacio que nos rodea es tridimensional, es decir, posee tres ejes de coordenadas, de modo que para especificar la posición de un punto, deberemos especificar sus tres coordenadas (x, y, z) tal y como se muestra en esta gráfica:



No somos capaces de imaginar un espacio tetradimensional, pero las matemáticas nos proporcionan un lenguaje universal que nos permite hablar de espacios con cualquier cantidad de dimensiones. Para ser exactos, representamos puntos del espacio tetradimensional mediante grupos de cuatro números (x, y, z, t) de la misma manera que representamos puntos del espacio tridimensional mediante tripletes de números (x, y, z). De igual manera, representamos los puntos de cualquier espacio n-dimensional, para cualquier

número natural *n*, mediante grupos de *n* números. Si alguna vez ha empleado un programa de hoja de cálculo, se habrá encontrado con estos grupos de *n* números: aparecen como filas en la hoja, en la que cada uno de los *n* números corresponde a un atributo particular de los datos almacenados. Así, cada fila de una hoja de cálculo se refiere a un punto en un espacio *n*-dimensional. Hablaremos más de espacios de varias dimensiones en el capítulo 10.

Si todos los elementos de un grupo pueden generarse, de un modo consistente,[13] como simetrías de un espacio *n*-dimensional, podemos decir que el grupo tiene «una representación *n*-dimensional».

Resulta que un grupo determinado puede tener representaciones de diferentes dimensiones. La razón por la que las partículas elementales se pueden ensamblar en grupos de a 8 y de a 10 es que el grupo SU(3) posee una representación 8-dimensional y una representación 10-dimensional. Las 8 partículas de cada octete construido por Gell-Mann y Ne'eman (como la del diagrama de la p. 26) están en correspondencia uno a uno con los 8 ejes coordenados de un espacio 8-dimensional que es una representación de SU(3). Lo mismo vale para el decuplete de partículas. Pero las partículas no pueden ensamblarse en, digamos, familias de 7 u 11, porque los matemáticos han demostrado que el grupo SU(3) no posee representaciones 7- u 11-dimensionales.

Al principio, esto era tan sólo una manera cómoda de combinar partículas con propiedades similares. Pero después, Gell-Mann fue más allá. Postuló que había una razón profunda para este esquema de clasificación. En esencia, dijo que este esquema funciona tan bien porque los hadrones están hechos de partículas aún más pequeñas, a veces de dos y a veces de tres: los quarks. El físico George Zweig (que llamó a estas partículas «ases») hizo, de modo independiente, una propuesta similar.

Se trataba de una propuesta sorprendente. No sólo atentaba contra la creencia común, en aquella época, de que protones, neutrones y otros hadrones eran partículas indivisibles, sino que se proponía que estas nuevas partículas

poseían cargas que eran fracciones de la del electrón. Se trataba de una predicción sorprendente porque nadie había visto con anterioridad esas partículas. Sin embargo, pronto se comprobó experimentalmente la existencia de los quarks y, como se había predicho, ¡poseían cargas eléctricas fraccionales!

¿Qué había motivado a Gell-Man y Zweig a predecir la existencia de quarks? La teoría matemática de representaciones de SU(3). Para ser exactos, el hecho de que el grupo SU(3) tiene dos representaciones tridimensionales diferentes (en realidad, esa es la razón del «3» en su nombre). Gell-Man y Zweig sugirieron que esas dos representaciones describirían dos familias de partículas fundamentales: 3 quarks y 3 antiquarks. Resultaba que las representaciones 8- y 10-dimensionales de SU(3) se podían construir a partir de las 3-dimensionales. Y esto daba unas instrucciones precisas para construir hadrones a partir de quarks, como en un juego de Lego.

Gell-Man denominó a los 3 quarks *up* («arriba»), *down* («abajo») y *strange* («extraño»).[14] Un protón consiste en dos quarks arriba y uno abajo, mientras que un neutrón consiste en dos quarks abajo y uno arriba, como hemos visto en los gráficos anteriores. Ambas partículas pertenecen al octete mostrado en el diagrama anterior. Otras partículas de este octete implican al quark extraño, así como a quarks arriba y abajo. Existen también octetes que consisten en partículas compuestas por un quark y un antiquark.

El descubrimiento de los quarks es un buen ejemplo de ese papel preponderante que desempeñan las matemáticas en la ciencia, del que hablábamos en el prefacio. Estas partículas se predijeron no fundamentándose en datos empíricos, sino a partir de patrones de simetría matemáticos. Fue una predicción puramente teórica, efectuada dentro del marco de una sofisticada teoría matemática de representaciones del grupo SU(3). Los físicos tardaron años en dominar esta teoría (e incluso hubo algunas resistencias a ella al principio) pero hoy en día forma parte básica de la teoría elemental de partículas. No sólo proporcionó una clasificación de hadrones, sino que también

llevó al descubrimiento de los quarks, lo que cambió para siempre nuestra comprensión de la realidad física.

Imagínelo: una teoría matemática aparentemente esotérica nos permitió llegar al corazón de los «ladrillos» básicos de la naturaleza. ¿Cómo no quedar fascinados ante la mágica armonía de esos diminutos trocitos de materia, o maravillarse ante la capacidad de las matemáticas para revelar los principios fundamentales que rigen el universo?

Dice una anécdota que Elsa, la mujer de Einstein, al oír que se necesitaba un telescopio en el Monte Wilson para determinar la forma del espacio-tiempo, dijo: «Oh, mi marido lo hace en el revés de un sobre».

Los físicos necesitan máquinas gigantescas y sofisticadas como el Gran Colisionador de Hadrones de Ginebra, pero lo asombroso es que científicos como Einstein y Gell-Man han empleado lo que parece ser el conocimiento matemático más puro y abstracto para desvelar los secretos más profundos del universo que nos rodea.

No importa quién sea o en qué crea, todos compartimos este conocimiento. Nos acerca unos a otros y proporciona un nuevo sentido a nuestro amor por el universo.

Capítulo 3
El quinto problema

El plan de Yevgueni Yevguénievich funcionó perfectamente: me «convertí» a las matemáticas. Aprendía rápido, y cuanto más me adentraba en las matemáticas, más me fascinaban y más quería saber. Es lo que ocurre cuando uno se enamora.

Comencé a reunirme con Yevgueni Yevguénievich periódicamente. Me pasaba libros para leer y una vez a la semana quedábamos en la escuela en que trabajaba para hablar de las lecturas. Yevgueni Yevguénievich jugaba al fútbol, a hockey sobre hielo y a voleibol habitualmente, pero como muchos hombres de la Unión Soviética de aquella época, era un fumador compulsivo. Incluso muchos años después asociaría el olor del humo de cigarrillos con las matemáticas.

A veces nuestras conversaciones se prolongaban hasta bien entrada la noche. Una vez, el vigilante, que no podía imaginar que a aquellas horas hubiera alguien dentro, cerró con candado el auditorio en el que estábamos. Y seguramente nosotros estábamos tan ensimismados en nuestra conversación que ni oímos el ruido de la llave al cerrarlo. Por suerte, el auditorio estaba en unos bajos y conseguimos salir por una ventana.

Era 1984, mi último año de escuela secundaria. Tenía que decidir a qué universidad solicitar la entrada. Moscú tenía muchas escuelas, pero sólo un lugar donde estudiar matemáticas: la Universidad Estatal de Moscú, más conocida por sus iniciales del ruso *Moskjovskiy Gosudarstvenny Universitet*, o MGU. Su famoso «Mekh-Mat», el Departamento de Mecánica y Matemáticas, era el buque insignia del programa matemático de la Unión Soviética.

Los exámenes de admisión a la universidad en Rusia no son como las pruebas SAT[vi] estadounidenses. En Mekh-Mat había cuatro: una prueba escrita y otra

---

[vi] El SAT (antiguamente acrónimo de *Scholastic Aptitude Test*, «Prueba de Aptitud Académica», nombre que ya no es

oral de matemáticas, una prueba oral de física y una prueba de composición literaria de ensayos. Quienes, como yo, se graduaban de la escuela secundaria con las máximas notas (en aquella época, en la Unión Soviética, nos daban una medalla de oro) accedíamos directamente si obteníamos un 5 (la máxima nota) en la primera prueba.

Por aquel entonces yo había sobrepasado ampliamente las matemáticas de secundaria, por lo que parecía que pasaría sin problemas las pruebas de la MGU.

Resulté ser demasiado optimista. El primer aviso vino en forma de una carta que recibí de una escuela por correspondencia con la que había estudiado. La había creado años atrás Israel Gelfand, el famoso matemático soviético (hablaremos mucho de él más adelante). La escuela pretendía ayudar a aquellos estudiantes que, como yo, vivían lejos de las grandes ciudades y no disponían de acceso a escuelas especiales de matemáticas. Todos los meses los estudiantes participantes recibían un folleto aclarando el material que se estudiaba en la escuela e incluso yendo un poquito más allá. También contenía problemas, más difíciles que los que se estudiaban en la escuela, que el estudiante debía devolver solucionados. Quienes ponían las notas (habitualmente estudiantes de la Universidad de Moscú) leían las soluciones y las devolvían corregidas. Yo estuve en esta escuela a distancia durante tres años, así como en otra más orientada a la física. Me resultaba un recurso útil, pese a que el material era muy parecido a lo que hacía en la escuela (a diferencia de lo que estudiaba en privado con Yevgueni Yevguénievich).

La carta que recibí de la escuela por correspondencia era escueta: «Si desea solicitar la entrada a la Universidad de Moscú pásese por nuestra oficina y estaremos encantados de orientarle». Daba su dirección en el campus de la MGU y los horarios de visita. Poco después de recibir la carta realicé el viaje, de dos horas en tren, hasta Moscú. La oficina de la escuela era una gran habitación

---

el oficial, pese a que se le sigue denominando por sus iniciales) es un examen estándar que se emplea en Estados Unidos para evaluar la preparación de un estudiante de cara a su ingreso en la universidad. (*N. del t.*).

con un montón de escritorios y gente trabajando, escribiendo a máquina y corrigiendo exámenes. Me presenté, enseñé la cartita y de inmediato me presentaron a una mujer diminuta, de treinta y muchos años.

—¿Cómo te llamas? —me dijo a modo de bienvenida.

—Eduard Frenkel. (En aquellos días empleaba la forma rusa de Edward).

—¿Y quieres solicitar entrada a la MGU?

—Sí.

—¿Qué departamento?

—Mekh-Mat.

—Ya veo. —Bajó lo ojos y me preguntó:

—¿Cuál es tu nacionalidad?

—Ruso —respondí.

—¿En serio? ¿Y cuáles son las nacionalidades de tus padres?

—Bueno…, mi madre es rusa.

—¿Y tu padre?

—Mi padre es judío.

Ella asintió.

Puede que este diálogo le resulte surrealista, y ahora que lo estoy escribiendo, a mí también me parece surrealista. Pero en la Unión Soviética, en 1984 (¿recuerda a Orwell?)[vii] no se consideraba extraño preguntar a alguien por su «nacionalidad». En el pasaporte interior que todo ciudadano debía llevar consigo, había incluso una línea destinada a «nacionalidad». Estaba bajo (1) nombre, (2) patronímico, (3) apellido y (4) fecha de nacimiento. Por ello lo llamaban *pyataya grafa*, «la quinta línea». La nacionalidad también se anotaba en el certificado de nacimiento, así como las de los padres. Si las nacionalidades eran diferentes, como en mi caso, los padres podían decidir qué nacionalidad dar al hijo.

[vii] Esto era un año antes de que Mijaíl Gorbachov llegara al poder en la Unión Soviética, y pasaría otro par de años hasta que lanzara su *perestroika*. El régimen totalitario soviético era, en 1984, en muchos aspectos un igual tan aterrador como el del visionario libro de Orwell. (*N. del a.*)

A todos los efectos y propósitos, la quinta línea era un eufemismo para saber si eras judío o no. También se detectaba, de esta manera, a personas de otras nacionalidades, como tártaros y armenios, contra quienes también había prejuicios y persecuciones (aunque no a la misma escala que contra los judíos). Mi quinta línea decía que yo era ruso, pero mi apellido (que era el de mi padre, y sonaba claramente judío) me delató.

Es importante subrayar que mi familia no era en absoluto religiosa. A mi padre no lo habían educado bajo ninguna tradición religiosa, ni tampoco a mí. En realidad, en aquella época, en la Unión Soviética, la religión era prácticamente inexistente. La mayor parte de iglesias cristianas ortodoxas estaban cerradas o habían sido destruidas. En las pocas que aún existían, uno sólo hallaba las típicas *babushkas* («abuelas»), como mi abuela materna. Ocasionalmente, ella asistía a algún servicio en la única iglesia activa en mi ciudad. Había incluso menos sinagogas. No había ninguna en mi ciudad; en Moscú, con una población de diez millones de personas, había oficialmente una sola.[15] Acudir a un servicio religioso en una iglesia o sinagoga era peligroso: agentes especiales camuflados podían detectarte y entonces te metías en problemas serios. Así que cuando se referían a alguien como «judío» no era en el sentido religioso, sino en el de etnia o «sangre».

Incluso si no hubiera empleado el apellido de mi padre, el comité de admisiones hubiera detectado, de todas formas, mi origen judío, porque la hoja de solicitud preguntaba explícitamente los nombres completos de ambos progenitores. Esos nombres completos incluían los patronímicos, es decir: los nombres de pila de los abuelos del solicitante. El patronímico de mi padre era Joseph, que en la Unión Soviética de aquella época sonaba inconfundiblemente judío, de modo que este hubiera sido otro modo de averiguarlo (si su apellido no me hubiera delatado). El sistema estaba pensado de tal manera que señalara a cualquiera que fuera al menos una cuarta parte judío.

Tras establecer, por esta definición, que yo era judío, la mujer me dijo:

—¿Sabes que no se admite a judíos en la Universidad de Moscú?

—¿Qué quiere decir?

—Que ni siquiera deberías tomarte la molestia de solicitarlo. No pierdas el tiempo. No te dejarán entrar.

Yo no sabía qué decir.

—¿Es por eso por lo que me envió esta carta?

—Sí. Estoy intentando ayudarte.

Miré a mi alrededor. Era obvio que todo el mundo en la oficina sabía de qué versaba esta conversación, incluso si no prestaban demasiada atención. Debía haber pasado docenas de veces, y todo el mundo parecía ya acostumbrado. Todos desviaban la mirada, como si yo fuera un paciente terminal. Me hundí.

* * * *

Había topado con el antisemitismo anteriormente, pero a una escala personal, no institucional. Cuando estaba en quinto curso, algunos compañeros de clase se dedicaron a gritarme *evrey, evrey* («judío, judío»). No creo que tuvieran ni idea de lo que significaba, algo que quedaba claro teniendo en cuenta que algunos de ellos confundían la palabra *evrey*, «judío», con *evropeyets*, «europeo»: seguramente habían oído comentarios antisemitas de sus padres u otros adultos. Lamentablemente, el antisemitismo estaba fuertemente arraigado en la cultura rusa. Yo era fuerte y tuve la suerte de poseer un par de auténticos amigos que me protegieron, de modo que aquellos matones nunca me golpearon, pero fue una experiencia desagradable. Yo era demasiado orgulloso como para decírselo a mis profesores o a mis padres, pero un día un profesor los escuchó e intervino. Como resultado, enviaron a aquellos chicos a hablar con el director y el acoso desapareció.

Mis padres habían oído acerca de la discriminación contra los judíos en el acceso a las universidades, pero por alguna razón no le dieron demasiada importancia. Para empezar, en mi ciudad no había muchos judíos, y todos los casos de supuesta discriminación de que habían oído hablar mis padres

estaban relacionados con programas de física. Un argumento típico que se daba era que no aceptaban judíos porque los estudios de aquellos programas estaban relacionados con la investigación nuclear y, por tanto, con secretos nacionales y de defensa: el gobierno no quería judíos en aquellas áreas porque podían emigrar a Israel o adonde fuese. Por esta misma lógica, no debería haber problemas con los que estudiaran matemáticas puras. Bien, pues por lo visto a alguien le importaba.

Todo en mi charla en la MGU fue extraño. No hablo sólo del aspecto kafkiano. Es posible concluir que la mujer con la que hablé simplemente quisiera ayudarme, a mí y a otros en mi situación, advirtiéndonos de lo que iba a ocurrir. Pero ¿era realmente así? Recordemos que hablamos de 1984, cuando el Partido Comunista y el KGB controlaban aún férreamente todos los aspectos de la vida en la Unión Soviética. La política oficial del estado era que todas las nacionalidades eran iguales, y sugerir lo contrario en público podría poner a alguien en peligro. Y, sin embargo, esta mujer me hablaba tranquilamente a mí, un extraño al que acababa de conocer, y no parecía preocuparle que la oyeran sus colegas.

Además, los exámenes para la MGU se rendían siempre un mes antes que los de las demás universidades. Por tanto, los estudiantes que suspendieran en la MGU aún tenían una oportunidad de entrar en alguna otra universidad. ¿Por qué querría alguien convencerles de que no lo intentaran? Era como si ciertas fuerzas poderosas pretendieran espantarme a mí y a otros estudiantes judíos. Pero no me iban a detener. Tras hablar de todo esto en profundidad, mis padres y yo decidimos que no teníamos nada que perder. Decidimos que enviaría mi solicitud para la MGU y lo haría lo mejor posible.

* * * *

El primer examen, a principios de julio, era una prueba de matemáticas por escrito. Siempre constaba de cinco problemas. El quinto problema se solía

considerar mortal, irresoluble. Era como el quinto elemento del examen. Pero resolví todos los problemas, incluido el quinto. Consciente como era de la alta probabilidad de que quien corrigiera mi prueba tuviera prejuicios contra mí e intentara encontrar huecos en mis soluciones, lo escribí todo con un detalle minucioso. Luego comprobé una y otra vez mis argumentos y cálculos para asegurarme de que todo era correcto. Parecía que sería un buen comienzo.

Mi siguiente prueba era el examen oral de matemáticas. Estaba programado para el día 13 de julio, que resultó ser un viernes.

Recuerdo muy claramente muchos detalles de aquel examen. Estaba citado a primera hora de la tarde, y esa mañana tomé con mi madre el tren. Entré en la sala de la MGU pocos minutos antes del examen. Era una clase normal, y había allí entre quince y veinte estudiantes y cuatro o cinco examinadores. Al comienzo de la prueba, cada uno de nosotros debía coger una hoja de papel de un gran montón que había en el escritorio a la entrada de la sala. Todos los papeles tenían dos preguntas escritas en él, y estaban boca abajo. Era como coger un billete de lotería, de modo que así llamábamos al papel, *bilet*, «billete». Había, quizá, un centenar de preguntas, todas conocidas de antemano. A mí no me importaba qué billete sacara, puesto que me conocía a fondo todo el temario. Tras coger el billete, los estudiantes debían sentarse en una de las mesas y preparar la respuesta, empleando tan sólo las hojas de papel que se daban.

Las preguntas de mi billete eran: (1) una circunferencia inscrita en un triángulo y la fórmula para el área del triángulo empleando su radio; y (2) derivada de la razón de dos funciones (sólo la fórmula). Estaba tan preparado para estas preguntas que las podría haber contestado dormido.

Me senté, escribí un par de fórmulas en una hoja de papel y concentré mis pensamientos. Me debió llevar unos dos minutos. No necesitaba prepararme más, estaba listo: levanté la mano. En la sala había varios examinadores y estaban esperando a que los estudiantes levantaran la mano, pero, cosa extraña, me ignoraron, como si yo no existiera. Era como si fuera transparente.

Estuve sentado con la mano levantada durante un rato: no hubo respuesta. Entonces, al cabo de un par de minutos, otros dos chicos levantaron la mano, y en cuanto lo hicieron los examinadores fueron hacia ellos. Los examinadores se sentaban junto al estudiante y le escuchaban responder las preguntas. Estaban bastante cerca de mí, así que les oía. Eran muy educados y en general asentían con la cabeza o hacían preguntas aclaratorias. Nada extraordinario. Cuando un estudiante acababa de responder las preguntas del billete (unos diez minutos) el examinador le daba un problema más para resolver. Los problemas parecían bastante sencillos, y la mayor parte de los estudiantes los resolvían fácilmente. ¡Y eso era todo!

Los primeros estudiantes ya se habían ido felices tras ganar obviamente un 5, la nota más alta, y yo seguía sentado allí. Finalmente detuve a uno de los examinadores que deambulaban, un chico joven que parecía recién doctorado, y le pregunté:

—¿Por qué no hablan conmigo?

Miró a lo lejos y dijo en voz baja:

—Perdona, no se nos permite hablar contigo.

A la hora, más o menos, de haber comenzado el examen, un par de señores de mediana edad entraron en la sala. Se dirigieron con brusquedad a la mesa del extremo de la sala y se presentaron ante el hombre que había allí sentado. Él asintió y me señaló. Me quedó muy claro que era la gente a la que había estado esperando: mis inquisidores.

Vinieron hasta la mesa y se presentaron. Uno era delgado y ágil; el otro, con cierto sobrepeso y un gran bigote.

—OK —dijo el delgado—. ¿Qué tenemos aquí? ¿Cuál es la pregunta?

—La circunferencia inscrita en un triángulo y...

Me interrumpió:

—¿Cuál es la definición de circunferencia?

Era bastante agresivo, lo que contrastaba mucho con la manera en que los otros examinadores trataban a los demás estudiantes. Además, los otros

examinadores nunca preguntaban nada antes de que el estudiante tuviera la oportunidad de presentar por completo su respuesta a la pregunta del billete. Dije:

—Una circunferencia es el conjunto de puntos, en un plano, equidistantes con respecto a un punto dado. —Era la definición estándar.

—¡Erróneo! —declaró, alegremente, el hombre.

¿Cómo podía ser erróneo? Esperó unos segundos y luego dijo:

—Es el conjunto de *todos* los puntos, en un plano, equidistantes con respecto a un punto dado.

Eso parecía estirar demasiado las palabras: el primer síntoma del problema que se avecinaba.

—OK —dijo el hombre—. ¿Cuál es la definición de triángulo?

Cuando le di la definición y pensó acerca de ella, sin duda intentando ver si podía encontrarle los tres pies al gato, continuó:

—¿Y cuál es la definición de una circunferencia inscrita en un triángulo?

Eso nos llevó a la definición de «tangente», luego a la de «recta» y eso a más cosas; pronto me estaba preguntando por el quinto postulado de Euclides acerca de la singularidad de las rectas paralelas, ¡algo que ni siquiera estaba en el programa de secundaria! Estábamos hablando de temas que ni siquiera se acercaban a la pregunta del billete y que iban mucho más allá de lo que se suponía que yo debía saber.

Se cuestionaba cada palabra que yo decía. Había que definir cada concepto, y si en la definición se empleaba otro concepto, se me pedía de inmediato que también lo definiera.

No es necesario decir que si mi apellido hubiera sido Ivanov, jamás me habrían hecho todas estas preguntas. Mirando hacia atrás, me doy cuenta de que lo prudente por mi parte hubiera sido protestar allí mismo y decir a los examinadores que se habían extralimitado. Pero esto es fácil de decir ahora. Yo tenía dieciséis años y esos hombres me sacaban veinticinco. Eran los funcionarios que administraban un examen en la Universidad Estatal de Moscú

y me sentía obligado a responder a sus preguntas lo mejor posible.

Tras un interrogatorio de casi una hora, pasamos a la segunda pregunta de mi billete.

Para entonces, los demás estudiantes se habían ido y el auditorio estaba vacío. Por lo visto, yo era el único estudiante de aquella sala que requería «cuidados especiales». Supongo que colocaban a los estudiantes judíos de tal manera que no hubiera más de uno o dos por sala.

La segunda pregunta me pedía escribir la fórmula de la derivada de la razón de dos funciones. No se me pedía dar definiciones ni pruebas. La pregunta decía, de forma específica, sólo la fórmula. Pero, por supuesto, los examinadores insistieron en que yo les explicara un capítulo completo del libro de cálculo.

—¿Cuál es la definición de derivada?

La definición estándar que les di implicaba el concepto de límite.

—¿Cuál es la definición de límite? —Luego—: ¿Qué es una función? —etcétera, etcétera, etcétera.

* * * *

La discriminación en los exámenes de acceso a la MGU ha sido tema de varias publicaciones. Por ejemplo, en su revelador artículo[16] en *Notices of the American Mathematical Society*, el matemático y pedagogo Mark Saul empleó mi historia como ejemplo. Efectuó una aguda comparación entre mi examen y el interrogatorio de la Reina de Corazones de *Alicia en el país de las maravillas*. Yo sabía las respuestas, pero en este juego, en que se volvía en mi contra todo lo que yo dijera, no tenía ninguna posibilidad de ganar.

En otro artículo[17] acerca del mismo tema en *Notices*, el periodista George G. Szpiro narra lo siguiente:

> *Los judíos (o los solicitantes con nombres de resonancias judías) eran separados a la entrada para un tratamiento especial... Les elevaban las dificultades en el examen oral. A los candidatos no deseados se les daban*

«preguntas asesinas» que exigieran razonamientos difíciles y largos cálculos. Algunas preguntas eran imposibles de resolver, se preguntaban de manera ambigua o carecían de respuesta correcta. No estaban destinadas a comprobar las habilidades del candidato, sino a cribar a los «indeseables». Los agotadores y evidentemente injustos interrogatorios a menudo duraban cinco o seis horas, pese a que, por decreto, sólo podían durar hasta tres horas y media. Incluso si las respuestas de un candidato eran correctas, siempre se podían encontrar razones para suspenderlo. En una ocasión suspendieron a un candidato por responder, a la pregunta «¿Cuál es la definición de circunferencia?», con «el conjunto de puntos equidistantes a un punto dado». La respuesta correcta, dijo el examinador, era «el conjunto de todos los puntos equidistantes a un punto dado». En otra ocasión, se consideró incorrecta la respuesta a la misma pregunta porque el estudiante no había estipulado que la distancia no podía ser cero. Cuando se le preguntó por las soluciones a una ecuación, declararon que la respuesta «1 y 2» era errónea: la correcta, según el examinador, era «1 o 2». (En otra ocasión, el mismo examinador dijo a otro candidato exactamente lo opuesto: que «1 o 2» era una respuesta errónea).

Pero volvamos a mi examen. Había pasado otra hora y media. Uno de los examinadores dijo:

—OK, hemos acabado con las preguntas. Aquí tiene un problema que queremos que resuelva.

El problema que me dieron era bastante difícil. La solución requería aplicar el llamado principio de Sturm, que no se estudiaba en secundaria.[18] Sin embargo, lo conocía por mis cursos por correspondencia, de modo que fui capaz de resolverlo. Mientras acababa mis cálculos finales, el examinador regresó.

—¿Ha acabado?

—Casi.

Miró lo que yo había escrito y vio, evidentemente, que mi solución era correcta y que estaba acabando mis cálculos.

—¿Sabes qué? —dijo—. Déjame darte otro problema.

Curiosamente, el segundo problema era el doble de difícil que el primero. También fui capaz de resolverlo, pero el examinador volvió a interrumpirme antes de acabar.

—¿Aún no has acabado? Prueba con este.

Si hubiera sido una velada de boxeo, con uno de los boxeadores acorralado en la esquina, sangrando, intentando desesperadamente resistir contra la batería de puñetazos que le caían encima (muchos de ellos por debajo de la cintura, todo hay que decirlo), ese habría sido el equivalente del golpe final, el mortal.

El problema parecía inocente a primera vista: dada una circunferencia y dos puntos en el plano fuera de la circunferencia, construya otra circunferencia que pase por esos dos puntos y toque a la primera circunferencia en un punto.

Pero, en realidad, la solución es bastante complicada. Incluso un matemático profesional podría no ser capaz de resolverlo directamente. Uno debe o bien emplear un truco llamado inversión o seguir una elaborada construcción geométrica. Ninguno de ambos métodos se estudiaba en secundaria, de modo que este problema no debería haber sido permitido en el examen.

Yo conocía la inversión, y me di cuenta de que la podía aplicar en ese caso. Comencé a trabajar en el problema, pero unos minutos más tarde mis interrogadores regresaron y se sentaron a mi lado. Uno de ellos dijo:

—¿Sabes? Acabamos de hablar con el director adjunto del comité de admisiones y le hemos comentado tu caso. Me preguntó por qué seguimos perdiendo el tiempo... Mira —sacó un formulario de aspecto oficial con algunas notas escritas a mano en él. Era la primera vez que lo veía—: en la primera pregunta de tu billete, no nos has dado una respuesta completa, ni siquiera sabías la definición de una circunferencia. Así que te tuvimos que poner un suspenso. En la segunda pregunta, tus conocimientos son también regulares,

pero OK, te hemos puesto un suspenso alto. Luego, no fuiste capaz de resolver el primer problema, ni el segundo problema. ¿Y el tercero? Tampoco lo has resuelto. ¿Ves? No tenemos más remedio que suspenderte.

Miré mi reloj. Habían pasado más de cuatro horas desde el inicio del examen. Estaba exhausto.

—¿Puedo ver mi examen escrito?

El otro hombre se levantó, fue hacia la mesa principal y trajo mi examen. Me lo puso delante. Mientras pasaba las páginas me sentí el protagonista de una película surrealista. Todas las respuestas eran correctas, todas las soluciones eran correctas. Pero estaba lleno de comentarios. Estaban escritos en lápiz (supongo que para que fueran fáciles de borrar) pero eran ridículos, como si alguien me estuviera gastando una broma pesada. Uno de ellos sigue grabado en mi mente: en el curso de un cálculo escribí «$\sqrt{8} > 2$», y había un comentario al lado: «no demostrado». ¿En serio? Los demás comentarios no eran mejores.

¿Y qué calificación me dieron, por los cinco problemas resueltos, con todas las respuestas correctas? No un 5, no un 4. Un 3, el equivalente ruso a una «C» estadounidense (un «aprobado»). ¿Me daban un «aprobado» por esto?

Sabía que se había acabado. No había manera de luchar contra el sistema. Dije:

—Muy bien.

Uno de ellos preguntó:

—¿No vas a apelar?

Yo sabía que había un comité de apelaciones. Pero ¿para qué? Quizá podría subir la nota del examen escrito de 3 a 4, pero apelar contra el resultado del examen oral sería más difícil: sería su palabra contra la mía. E incluso si pudiera elevar la nota a un 3, luego, ¿qué? Había aún dos exámenes más en los que podrían cazarme.

Esto es lo que Szpiro escribió en *Notices*:[19]

> *Y si un candidato, contra todo pronóstico, conseguía aprobar tanto el examen escrito como el oral, se le podía tumbar en el obligatorio ensayo*

sobre literatura rusa con la frase «el tema no está suficientemente elaborado». Con raras excepciones, las apelaciones contra decisiones negativas no tenían ninguna posibilidad de éxito. En el mejor caso se les ignoraba; en el peor, se castigaba al candidato por mostrar «desprecio hacia sus examinadores».

Una pregunta más importante era: ¿quería yo realmente entrar en una universidad que hacía todo lo posible por evitar que yo entrara en ella? Respondí:

—No. En realidad, quiero retirar mi candidatura.

Vi la alegría en sus caras. Que no hubiera apelación significaba menos trabajo, menos potenciales problemas.

—Claro —dijo el más parlanchín—. Te traeré tus cosas.

Salimos de la habitación y entramos en el ascensor. Las puertas se cerraron. Estábamos solos. El examinador estaba, evidentemente, de buen humor. Me dijo:

—Lo has hecho fantástico. Un examen realmente impresionante. Estaba preguntándome…,¿has ido a una escuela especial de matemáticas?

—Crecí en una ciudad pequeña, no había escuelas especiales de matemáticas.

—¿En serio? ¿Quizá tus padres son matemáticos?

—No, son ingenieros.

—Interesante… Es la primera vez que veo a un estudiante tan bueno y que no haya acudido a una escuela especial.

Yo no me podía creer lo que estaba oyendo. Este hombre me acababa de suspender tras un agotador examen de casi cinco horas, injustamente administrado, discriminatorio. Por lo que a mí respectaba, había acabado con mi sueño de convertirme en matemático. Un estudiante de dieciséis años cuyo único delito era proceder de una familia judía… ¿Y ahora me felicitaba y esperaba que me abriera ante él?

Pero ¿qué podía hacer yo? ¿Gritarle, darle un puñetazo en la cara? Me quedé

allí de pie, aturdido, en silencio.

Él continuó:

—Déjame que te dé un consejo: ve al Instituto de Petróleo y Gas de Moscú. Tienen un programa de matemáticas aplicadas que es muy bueno. Allí admiten estudiantes *como tú*.

Las puertas del ascensor se abrieron y un minuto después me alcanzaba mi gruesa carpeta de solicitud de ingreso, con un buen montón de mis premios y trofeos escolares sobresaliendo de manera extraña.

—¡Buena suerte! —me deseó, pero yo estaba demasiado cansado para responder.

* * * *

Mi único deseo era salir de allí lo antes posible. Y de repente estuve fuera en la enorme escalinata del edificio de la MGU. Respiraba nuevamente el aire fresco del verano y oía los sonidos de la gran ciudad en la lejanía. Estaba anocheciendo y no había casi nadie por allí. De inmediato vi a mis padres, que me habían esperado ansiosos en la escalera todo ese tiempo. Por la cara que puse, y por la gruesa carpeta que llevaba, supieron de inmediato qué había pasado dentro.

Capítulo 4
Kerosinka

Esa noche, tras el examen, mis padres y yo regresamos a casa bastante tarde. Nos encontrábamos todavía en el estado inicial de *shock*, sin poder creer lo que había ocurrido.

Era una experiencia desgarradora para mis padres. Yo siempre había tenido una relación muy estrecha con ellos, y siempre me habían apoyado y dado su amor de manera incondicional. Nunca me habían forzado a estudiar más ni a escoger una profesión determinada, sino que me animaron a seguir lo que me apasionaba. Y, por supuesto, estaban orgullosos de mis logros. Estaban desolados por lo sucedido en mi examen, tanto por la flagrante injusticia como por haber sido incapaces de proteger a su hijo.

Treinta años atrás, en 1954, el sueño de mi padre de ser físico teórico se había hecho añicos de manera igual de despiadada, pero por otra razón. Como millones de inocentes, su padre (mi abuelo) había sido una víctima de las persecuciones de Stalin. Lo habían arrestado en 1948 bajo la falsa acusación de querer volar la gran planta de automóviles de Gorki (hoy en día, Nizhni Nóvgorod) en la que trabajaba como encargado de suministros. La única «prueba» presentada en su contra en el momento de la detención fue una caja de cerillas. Fue enviado a un campo de trabajos forzados en una mina, en el norte de Rusia, parte del archipiélago Gulag que Aleksandr Solzhenitsyn y otros escritores describirían tan vívidamente años después. Calificaron a mi abuelo de «enemigo del pueblo» y a mi padre, por tanto, de «hijo de un enemigo del pueblo».

Mi padre estaba obligado a escribirlo en su solicitud de ingreso al Departamento de Física de la Universidad de Gorki. Pese a que acabó la secundaria con las notas más altas y se suponía que lo aceptarían automáticamente, lo suspendieron en la entrevista, cuyo único propósito era cribar a los parientes de los «enemigos del pueblo». Mi padre se vio obligado a

ingresar, en lugar de ello, en una escuela de ingeniería. Como con otros prisioneros, a su padre lo rehabilitaron y liberaron por decreto de Nikita Jrushév, en 1956, pero ya era demasiado tarde para reparar la injusticia.

Y ahora, treinta años después, su hijo tenía que pasar por una experiencia similar.

Pero no era un momento para la compasión por uno mismo. Teníamos que decidir rápidamente qué hacer a continuación, y la primera pregunta era a qué escuela enviar la solicitud. Todas ellas realizaban los exámenes en el mismo momento, en agosto (en aproximadamente dos semanas), y yo sólo podía enviar mi solicitud a una.

A la mañana siguiente mi padre se despertó muy temprano y regresó a Moscú. Se tomó en serio la recomendación que me había hecho mi examinador de la MGU. De modo que en cuanto llegó a Moscú fue directamente a la oficina de solicitudes para el Instituto de Petróleo y Gas.[viii] De alguna manera halló a alguien dispuesto a hablar con él en privado y le describió mi situación. Su colega le respondió que estaba al tanto del antisemitismo de la MGU y le aseguró que en el Instituto de Petróleo y Gas no había nada de todo eso. Le explicó que el nivel de quienes solicitaban el acceso al programa de matemáticas aplicadas era bastante alto debido a la gran cantidad de estudiantes como yo, no aceptados en la MGU. El examen de entrada no sería precisamente un paseo. Pero le dijo:

—Si su hijo es tan brillante como usted dice, lo admitirán. Aquí no hay ninguna discriminación contra los judíos en los exámenes de ingreso.

Y al final de la conversación le aclaró:

—Sin embargo, he de advertirle que los estudios de posgrado los lleva gente distinta, y creo que probablemente no acepten a su hijo en la escuela de posgrado.

Pero eso era algo de lo que preocuparse dentro de cinco años, demasiado

---

[viii] Massachusetts Institute of Technology. (*N. del t.*)

tiempo.

Mi padre fue a un par de escuelas más en Moscú con programas de matemáticas aplicadas, pero no había nada como la actitud que encontró en el Instituto de Petróleo y Gas. De modo que, cuando regresó esa tarde y nos contó las noticias, a mi madre y a mí, decidimos inmediatamente que solicitaríamos el ingreso en el Instituto de Petróleo y Gas, en su programa de matemáticas aplicadas.

El Instituto era uno de la docena de escuelas de Moscú que preparaban técnicos para varias industrias, como el Instituto de Metalurgia y el Instituto de Ingenieros Ferroviarios (en la Unión Soviética, muchas facultades se llamaban «institutos»). Desde finales de la década de 1960, el antisemitismo de la MGU «había creado una demanda de puestos de matemáticos para estudiantes judíos», escribe Mark Saul en su artículo.[20] El Instituto de Petróleo y Gas «comenzó a responder a esa demanda, beneficiándose de la política antisemita de otras universidades para obtener alumnos altamente cualificados». Mark Saul explica:

> *Su apodo, «Kerosinka», reflejaba [su] orgullo y cinismo. Una kerosinka era una estufa de queroseno, una respuesta de tecnología básica pero eficaz a la adversidad. A los estudiantes y graduados de la universidad pronto se les conoció como kerosineshchiks, y la escuela se convirtió en un refugio para estudiantes judíos apasionados por las matemáticas.*
>
> *¿Cómo escogió el destino a Kerosinka como receptáculo de tanto talento? No es fácil responder a esta pregunta. Sabemos que había otras instituciones que se beneficiaron de la exclusión de los judíos de la MGU. Sabemos también que el establecimiento de esta política exclusivista fue un acto consciente, que probablemente se encontró con cierta resistencia al principio. Para algunas instituciones debe haber resultado más fácil seguir aceptando estudiantes judíos que cambiar su política. Pero una vez el fenómeno creció y hubo un buen contingente de estudiantes judíos en Kerosinka, ¿por qué se le toleró? Existen oscuros*

rumores de un complot por parte de la policía secreta (el KGB) para tener a los estudiantes judíos bien vigilados, en uno o dos lugares. Pero parte de la motivación podría haber sido más positiva: la administración del instituto habría visto crecer un buen departamento y haber hecho todo lo necesario para preservar este fenómeno.

Creo que la última frase es la más acertada. El presidente (o rector, como se le denominaba) del Instituto de Petróleo y Gas, Vladimir Nikoláevich Vinógradov, era un astuto administrador, famoso por reclutar profesores implicados en un tipo de enseñanza innovadora y por usar nuevas tecnologías en las clases. Fue él quien instituyó la política de que todos los exámenes (incluyendo las pruebas de acceso) se hicieran *por escrito*. Evidentemente, había alguna oportunidad para abusos incluso en exámenes escritos (como se vio en mi examen escrito de acceso a la MGU), pero esto evitaba el tipo de debacles como el que tuvo lugar en mi examen oral en la MGU. No me sorprendería que fuese decisión personal de Vinógradov no discriminar a los solicitantes judíos; de ser así, debe haber requerido de buena voluntad, y puede que hasta coraje, por su parte.

Como se había anunciado, no pareció haber discriminación en las pruebas de acceso. Me aceptaron tras el primer examen (matemáticas escritas), en el que saqué un 5, es decir, una «A» («excelente»). A los alumnos que habían ganado medalla de oro se les aceptaba directamente si obtenían un «excelente» en el primer examen. En un extraño giro de los acontecimientos, este 5 no me llegó fácilmente, puesto que aparentemente algunas de mis soluciones se incorporaron de forma incorrecta en el sistema automático de corrección, por lo que inicialmente mi nota fue un 4, una «B» («notable»). Tuve que pasar por el proceso de apelaciones, que implicaba hacer cola durante horas, con todo tipo de malos pensamientos arremolinándose en mi cabeza. Pero en cuanto conseguí hablar con el comité de apelaciones se halló el fallo y se arregló de inmediato, se me pidieron excusas y la odisea de mis pruebas de acceso universitario llegó a su fin.

En septiembre de 1984 comenzó el curso escolar y conocí a mis nuevos compañeros de clase. Sólo se aceptaba, en este programa, a cincuenta miembros nuevos al año (como contraste, en Mekh-Mat el número era de casi quinientos). Muchos de mis compañeros habían pasado por la misma experiencia que yo. Eran parte de los estudiantes de matemáticas con más talento y más brillantes del lugar.

Todos, excepto yo y Misha Smolyak, de Kishinev, que se convirtió en mi compañero de dormitorio, eran de Moscú. Quienes vivían fuera de Moscú sólo podían solicitar el ingreso si se habían graduado de la secundaria con medalla de oro, como era, por suerte, mi caso.

Muchos de mis compañeros habían estudiado en las escuelas de Moscú con mejores programas de matemáticas: las escuelas nº 57, nº 179, nº 91 y nº 2. Algunos se acabarían convirtiendo en matemáticos profesionales, y ahora trabajan como profesores en algunas de las mejores universidades del mundo. Sólo en mi clase contábamos con algunos de los mejores matemáticos de nuestra generación: Pasha Etingof, hoy en día profesor en el MIT;[ix] Dima Kleinbock, profesor en la Universidad de Brandeis; y Misha Finkelberg, profesor de la Escuela Superior de Economía de Moscú. Era un ambiente muy estimulante.

En Kerosinka las matemáticas se enseñaban a un nivel alto, y los cursos básicos como análisis, análisis funcional o álgebra lineal se enseñaban con el mismo rigor que en la MGU. Sin embargo, no había cursos de otras áreas de matemáticas puras, como geometría o topología. Kerosinka sólo ofrecía el programa de matemáticas aplicadas, de modo que nuestra educación estaba encaminada hacia aplicaciones concretas, en particular a la exploración y producción de petróleo y gas. Tuvimos que tomar clases más orientadas a lo aplicado, como optimización, análisis numérico, probabilidad y estadística.

[ix] El SAT (antiguamente acrónimo de *Scholastic Aptitude Test*, «Prueba de Aptitud Académica», nombre que ya no es el oficial, pese a que se le sigue denominando por sus iniciales) es un examen estándar que se emplea en Estados Unidos para evaluar la preparación de un estudiante de cara a su ingreso en la universidad. (*N. del t.*).

Había también un gran componente de informática.

Me alegró tener la oportunidad de aprender de estas clases de matemática aplicada. Me enseñó que no hay una diferencia real entre matemáticas «puras» y matemáticas «aplicadas»: las matemáticas aplicadas, si son de buena calidad, se basan en sofisticadas matemáticas puras. Pero, pese a lo útil de la experiencia, no podía olvidar mi amor verdadero. Tenía que encontrar una manera de aprender los temas de matemáticas puras que no se daban en Kerosinka.

La solución se presentó sola cuando me hice amigo de los demás estudiantes, incluidos aquellos que habían ido a prestigiosas escuelas de matemáticas de Moscú. Nos contamos nuestras historias. A los que eran judíos (según los estándares que he descrito con anterioridad) los habían suspendido en los exámenes de manera tan despiadada como a mí, mientras que a todos sus compañeros no judíos los habían aceptado en la MGU sin mayores problemas. A través de esos compañeros ellos sabían lo que pasaba en el Mekh-Mat, qué cursos valían la pena y cuándo y dónde se daban conferencias. De modo que en mi segunda semana en Kerosinka, mi compañero (creo que fue Dima Kleinbock) vino hacia mí y dijo:

—Eh, vamos a la clase de Kirílov en la MGU. ¿Vienes con nosotros?

Kirílov era un famoso matemático, y claro que quería ir a su clase. Pero no tenía ni idea de que fuera posible. El gran edificio de la MGU estaba custodiado por policías. Se necesitaba tener un pase para entrar.

—No te preocupes por eso —dijo mi compañero—. Saltaremos la valla.

Sonaba peligroso y fascinante, así que dije:

—¡Claro!

La valla que rodeaba el edificio era bastante alta, quizá unos siete metros, pero en una parte el metal estaba doblado y uno podía colarse. Luego, ¿qué? Entrábamos en el edificio por una puerta lateral y tras unos largos pasillos acabábamos en la cocina. Desde allí, atravesando la cocina (intentábamos no atraer mucho la atención del personal que trabajaba) a la cafetería, y de ella al

salón principal de la entrada. Ascensor al piso catorce, donde estaba el auditorio.

Aleksandr Aleksándrovich Kirílov (o «San Sanych»,[x] como lo llamaban afectuosamente) es un conferenciante carismático y un gran ser humano, al que llegaría a conocer bien años más tarde. Creo que estaba dando una clase normal acerca de la teoría de representación según lo delineado en su famoso libro.[xi] Daba asimismo un seminario de posgraduado, al que también asistimos.

Nos salimos con la nuestra gracias al buen corazón de Kirílov. Su hijo Shurik (hoy en día profesor en la Universidad Stony Brook) había estudiado en la escuela especial de matemáticas nº 179 junto con mis compañeros Dima Kleinbock y Syoma Hawkin. Obviamente, San Sanych conocía la situación con respecto a las admisiones en la MGU. Muchos años después me confesó que no había nada que pudiera hacer al respecto: no le dejaban ni acercarse al comité de admisiones, consistente, mayoritariamente, en *apparatchiks* del Partido Comunista. Lo único que podía hacer era permitirnos colarnos en sus clases.

Kirílov hacía todo lo posible para que los estudiantes de Kerosinka que asistían a sus clases se sintieran bienvenidos. Uno de los mejores recuerdos de mi primer año universitario fue asistir a sus animadas clases y seminarios. También asistí a un seminario impartido por Aleksandr Rudakov, que fue una gran experiencia.

Entre tanto, aprendía cuantas matemáticas podía en Kerosinka. Vivía internado pero regresaba a casa los fines de semana, y todavía me reunía con Yevgueni Yevguénievich cada dos semanas. Me aconsejaba qué libros leer y yo le informaba de mis progresos. Pero estaba ya llegando rápidamente al punto en que, si quería mantener mi progresión, así como mi motivación, necesitaría un

---

[x] En ruso, «San» o «Sanya» es un diminutivo cariñoso de Aleksandr; para el patronímico Aleksándrovich se emplea el diminutivo «Sanych». «San Sanych» es una manera común de referirse, pues, a cualquiera que se llame Aleksandr Aleksándrovich. Para una somera explicación (en inglés) de los diminutivos, patronímicos, etc., en lengua rusa, véase tvtropes.org. (*N. del t*.).

[xi] Se refiere a *Elements of the Theory of Representations*. Existen varias ediciones en inglés, ruso y francés. (*N. del t*.).

tutor con el que reunirme con más periodicidad y del que no sólo aprender, sino obtener algún problema en el que trabajar. Dado que no estaba en Mekh-Mat, no podía aprovechar los vastos recursos que ofrecía. Y yo era demasiado tímido para acercarme a alguien como A. A. Kirílov y pedirle estudiar con él de manera individual, o que me diera un problema en el que trabajar. Me sentía abandonado. Para el semestre de primavera de 1986 (mi segundo año en Kerosinka) la complacencia y el estancamiento comenzaban a aposentarse. Con todo en mi contra, comenzaba a dudar de poder conseguir mi sueño de convertirme en matemático.

Capítulo 5
Las hebras de la solución

Estaba empezando a desesperar cuando un día, durante un descanso en una clase en Kerosinka, uno de nuestros profesores de matemáticas más respetados, Aleksandr Nicolaévich Varchenko, se me acercó en el pasillo. Varchenko es un antiguo estudiante de Vladimir Arnold (uno de los grandes matemáticos soviéticos) y un matemático de clase mundial por méritos propios.

—¿Te interesaría trabajar en un problema matemático? —me preguntó.

—Sí, por supuesto, ¿qué tipo de problema? —respondí, como si no estuviera feliz de poder hacer cualquier cosa.

—Hay una cuestión que ha surgido en mi investigación y creo que es un buen problema para pasar a un estudiante brillante como tú. El experto en este tema es Dmitry Borisovich Fuchs.

Era el nombre de un famoso matemático, uno que ya había oído con anterioridad.

—Ya he hablado con él y está de acuerdo en supervisar una investigación de un estudiante acerca del tema. Ten su número de teléfono. Llámalo y él te dirá qué hay que hacer.

Es habitual, entre matemáticos expertos como Varchenko, encontrarse con todo tipo de problemas matemáticos sin resolver en su investigaciones. Si el problema de Varchenko hubiera estado íntimamente relacionado con su propia área de investigación lo habría intentado resolver él solo. Pero ningún matemático hace todo por sí mismo, sino que se delegan este tipo de problemas sin resolver (en general, los que consideran más sencillos) en sus estudiantes. A veces un problema queda fuera de los intereses inmediatos de un profesor pero este puede sentir curiosidad al respecto, como era el caso con mi problema. Era la razón por la que Varchenko había reclutado a Fuchs, un experto en el tema, para que me supervisara. En resumen, se trataba, en

líneas generales, de una «transacción» típica en el funcionamiento social del mundo de los matemáticos.

En realidad, lo inusual era que Fuchs no enseñaba formalmente en ninguna universidad. Pero durante muchos años, había estado, con un montón de otros matemáticos de primer nivel, intentando aliviar el efecto de la discriminación contra los estudiantes judíos, dando clases en privado a jóvenes con talento que la MGU no había admitido.

Como parte de ese esfuerzo, Fuchs había estado implicado en lo que se acabó conociendo como la «Universidad Popular Judía», una escuela nocturna no oficial en la que él y sus colegas daban clases y conferencias a estudiantes. Algunas de esas conferencias se habían dado en Kerosinka, aunque bastante antes de que yo entrara.

La escuela la había organizado una mujer valiente, Bella Muchnik Subbotovskaya, que era su alma y su corazón. Lamentablemente el KGB se había enterado, alarmado de que hubiera reuniones no autorizadas de judíos. Al final el KGB la convocó y la interrogó. Poco después de la entrevista, un camión la atropelló en circunstancias sospechosas, lo que llevó a mucha gente a creer que se había tratado, en realidad, de un asesinato a sangre fría.[21] Sin ella al timón, la escuela acabó desapareciendo.

Yo llegué a Kerosinka dos años después de esta trágica cadena de acontecimientos. Aunque la escuela nocturna ya había desaparecido, existía todavía una pequeña red de matemáticos profesionales que ayudaban a desafortunados parias como yo, pero a escala individual. Buscaban estudiantes prometedores y les proporcionaban consejos, ánimos y, en algunos casos, les hacían de mentores y asesores. Esta era la razón por la que Varchenko me había pasado el problema a mí, un estudiante en Kerosinka, en lugar de a un estudiante de Mekh-Mat, donde, con sus contactos, podría haber hallado sin problemas un estudiante dispuesto a aceptarlo. Esta era también la razón por la que Fuchs estaba dispuesto a pasar tiempo libre supervisándome.

Me alegra que lo hiciera. Mirando en retrospectiva, me queda claro que sin la

amabilidad y generosidad de Fuchs yo nunca me habría convertido en matemático. Estaba estudiando matemáticas en Kerosinka y asistía a las clases de la MGU, pero eso, por sí solo, no era suficiente. En realidad, es casi imposible que los estudiantes realicen investigaciones propias sin alguien que guíe su trabajo. Tener un asesor es totalmente fundamental.

Por aquella época, sin embargo, lo único que yo sabía era que tenía en mi mano el número de teléfono de Fuchs, un matemático de renombre, y que iba a embarcarme en un proyecto supervisado por él. ¡Era increíble! No sabía en qué acabaría todo esto, pero de inmediato me di cuenta de que algo grande acababa de ocurrir.

Esa tarde, tras reunir todo mi coraje, llamé a Fuchs desde un teléfono público y le expliqué quién era.

—Sí, ya lo sé —dijo Fuchs—; he de darte un ensayo para que lo leas.

Nos encontramos al día siguiente. Fuchs tenía la apariencia física de un gigante; no era en absoluto como me lo había imaginado. Era muy formal.

—Ten —me dijo, entregándome una copia impresa de un artículo—; intenta leer esto, y en cuanto veas una palabra que no entiendas, llámame.

Yo me sentía como si me acabaran de pasar el Santo Grial.

Se trataba de un artículo de una docena de páginas que él había escrito unos años atrás acerca de los «grupos de trenzas». Aquella tarde comencé a leerlo. Los tres años precedentes de estudios con Yevgueni Yevguénievich y por mi cuenta no habían sido en vano. No sólo comprendía todas las palabras del título, sino que también entendía en líneas generales el resumen. Decidí intentar leerlo por completo por mí mismo. Era una cuestión de orgullo. Ya me imaginaba lo impresionado que quedaría Fuchs cuando le dijese que había comprendido todo por mi cuenta.

Ya había oído hablar con anterioridad de los «grupos de trenzas». Se trata de excelentes ejemplos de grupos, ese concepto del que ya hablamos en el capítulo 2. Yevgueni Yevguénievich me había presentado el concepto en el contexto de las simetrías, de tal manera que elementos de los grupos que

habíamos tocado eran simetrías de un objeto. Por ejemplo, el grupo circular consistía en las simetrías de una mesa (o cualquier otro objeto) redonda, y el grupo de cuatro rotaciones era el grupo de simetrías de una mesa (o cualquier otro objeto) cuadrada. Una vez conocemos la noción de «grupo», podemos buscar otros ejemplos. Resulta que hay muchos ejemplos de grupos que no tienen nada que ver con las simetrías, que fueron el motivo principal de que introdujéramos el concepto de grupo. Esto es algo típico, en realidad. La creación de un concepto matemático puede estar motivada por problemas y fenómenos de un área específica de las matemáticas (o física, ingeniería, etcétera) pero posteriormente puede resultar útil para otras áreas y adaptarse bien a ellas.

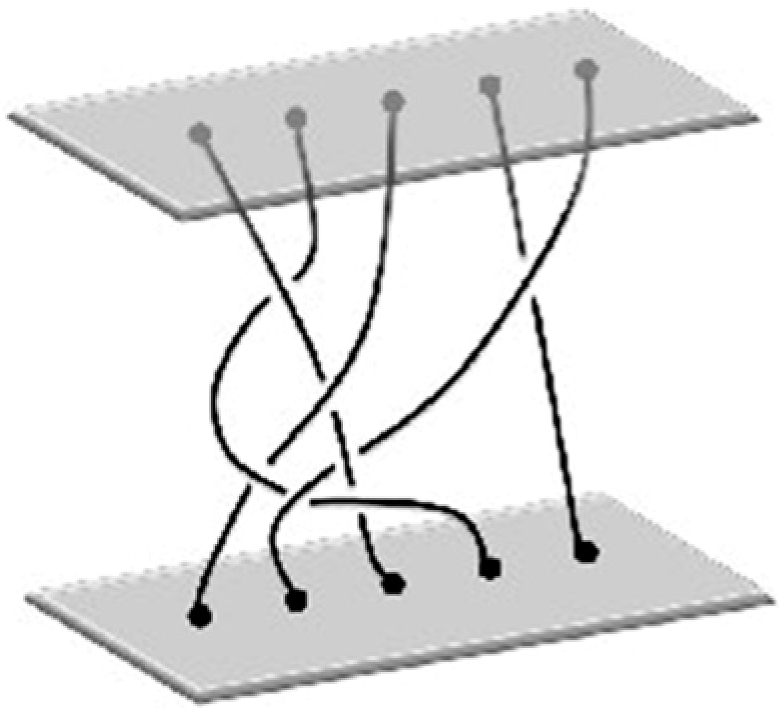
Resulta que muchos grupos no proceden de simetrías. Y los grupos de trenzas son parte de esos grupos.

Yo no conocía aún nada de la aplicación en el mundo real de los grupos de trenzas, en áreas tales como la criptografía, la computación cuántica y la biología, de los que hablaremos más tarde. Pero quedé hipnotizado por la belleza innata de estas abstracciones matemáticas.

Hay un grupo de trenzas para cada número natural $n = 1, 2, 3$... Podemos emplear estos números para obtener un nombre para cada grupo de trenzas. Por norma general, los denominamos B_n, de tal manera que para $n = 1$ tenemos un grupo llamado B_1; para $n = 2$ tenemos un grupo llamado B_2, etcétera.

Para describir el grupo B_n, debemos describir en primer lugar sus elementos, como hicimos con las simetrías rotacionales de las mesas redonda y cuadrada. Los elementos del grupo B_n son las llamadas trenzas con n hebras, como la que se ve en la gráfica inferior, con $n = 5$. Imagine dos placas sólidas y transparentes con cinco clavos en cada una, y con una hebra que conecta cada clavo de una placa a un clavo de la otra placa. Dado que las placas son transparentes, podemos ver cada hebra en su totalidad. Cada hebra puede cruzarse con cualquier otra hebra, pero no pueden enredarse consigo misma.

Cada clavo ha de conectar con tan sólo una hebra. Las posiciones de las placas quedan fijadas de modo definitivo.

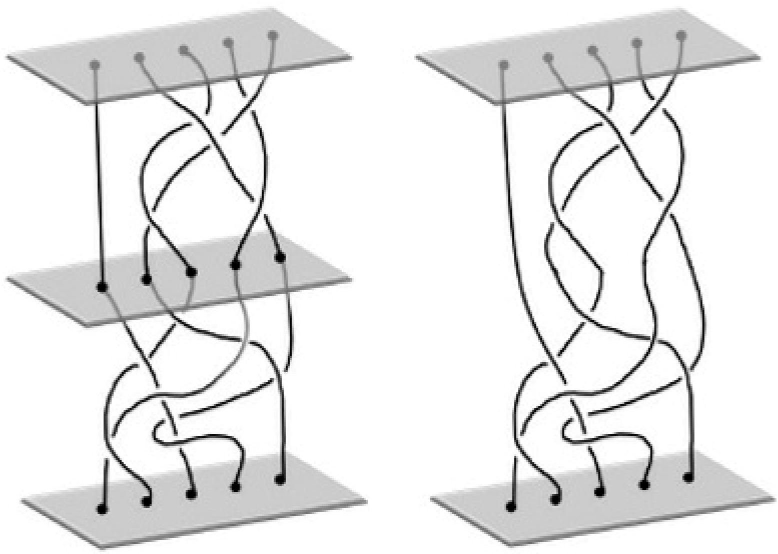


Todo esto (dos placas y la cantidad de hebras que sea) constituye una trenza, de la misma manera que un coche posee cuatro ruedas, una transmisión, cuatro puertas, etcétera. No consideramos esas partes por separado, sino que nos centramos en la trenza como en un todo.

Estas son las trenzas con *n* hebras. Ahora hemos de mostrar que todas las trenzas con *n* hebras forman un grupo. Lo que significa que debemos describir cómo realizar la composición de dichas hebras. En otras palabras, para cada par de trenzas con *n* hebras, hemos de producir otra trenza con *n* hebras, como cuando al aplicar dos rotaciones, una después de la otra, obteníamos una tercera rotación. Y después deberemos comprobar que esa composición satisface las propiedades enumeradas en el capítulo 2.

Así que supongamos que tenemos dos trenzas. A fin de crear una nueva trenza

a partir de ellas, las ponemos una encima de la otra, alineando los clavos, como se muestra en el gráfico. Y luego retiramos las placas de en medio mientras conectamos las hebras superiores con las inferiores, ambas unidas a sus respectivos clavos.



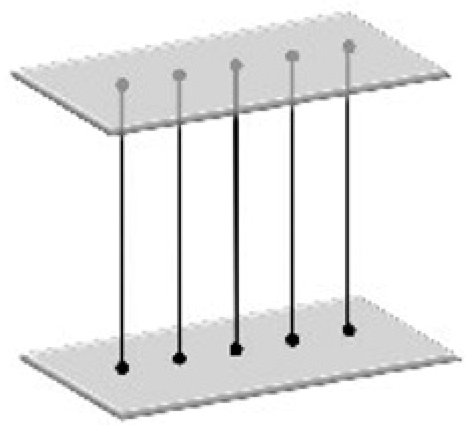
La trenza resultante será el doble de alta, pero eso no es un problema. Ya ajustaremos las hebras para que la trenza resultante sea igual de alta que las originales, pero conservando la manera en que las hebras están dispuestas unas en torno a las otras. *Voilà*! Comenzamos con dos trenzas y hemos creado una nueva. Esta es la regla de composición de dos trenzas en el grupo de trenzas.

Dado que un grupo de trenzas no procede de simetrías, a veces es mejor no pensar en esta operación tanto como una «composición» (que era natural en el caso de las simetrías) sino como en una «suma» o «multiplicación», similar a la operación que realizamos con números. Desde este punto de vista, las trenzas son como números... unos «números peludos», si se quiere ver así.

Dados dos números enteros, podemos sumarlos y obtener un número nuevo. De igual modo, dadas dos trenzas, producimos una nueva mediante la regla

arriba descrita. Así que podemos pensar en esta como la «suma» de dos trenzas.

Ahora debemos comprobar que esta suma de trenzas satisface todas las propiedades (o axiomas) de un grupo. En primer lugar, necesitamos el elemento identidad (en el grupo circular, era el punto correspondiente a una rotación de 0 grados). Será la trenza en la que todas las hebras bajan directamente sin entrelazarse, como se ve en el siguiente gráfico. Es un tipo de trenza «trivial», en el que no se da ningún trenzado, de la misma manera en que una rotación de 0 grados no rota en absoluto.[22]



Acto seguido hemos de buscar la trenza inversa de una trenza *b* dada: en el caso del grupo circular, era la rotación en el mismo ángulo pero en dirección opuesta. Esta trenza debería ser tal que, sumada a la trenza *b*, según la regla descrita arriba, obtuviéramos la trenza identidad.

Esta trenza inversa será el reflejo de *b* con respecto a la placa inferior. Si la componemos a partir de la original, de acuerdo con nuestra regla, deberemos ser capaces de resituar todas las hebras de tal manera que el resultado sea la trenza identidad.

En este momento he de explicar algo importante, que hasta ahora, por decirlo de alguna manera, he estado ocultando bajo la alfombra: no distinguimos entre trenzas que hayamos obtenido a partir de otras tirando de las hebras, alargándolas o acortándolas como nos plazca, en tanto no cortemos ni volvamos a coser las hebras. En otras palabras: las hebras deben ir unidas a los mismos clavos, y no permitimos que las hebras se atraviesen unas a otras; pero podemos modificarlas de cualquier otra manera que deseemos. Pensemos en esto como en peinar nuestra trenza. Cuando lo hacemos, sigue siendo nuestra trenza (sólo que más bonita). Es en este sentido en que la suma de una trenza y de su imagen en el espejo sea «la misma» que la trenza identidad; no

es literalmente la misma, pero se convierte en ella una vez retocamos las hebras.[23]

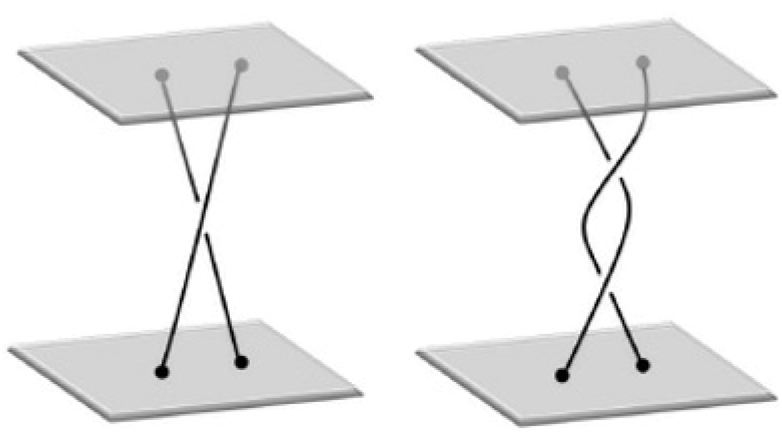
Ahora vemos que satisface los axiomas de un grupo (composición o suma, identidad e inverso). Hemos demostrado que las trenzas con *n* hebras forman un grupo.[24]

* * * *

Para ver de manera más concreta qué son los grupos de trenzas, examinemos atentamente el más sencillo: el grupo B_2 de trenzas con 2 hebras (el grupo B_1, con una sola hebra, sólo tiene un elemento y por tanto no hay nada de lo que tratar).[25]

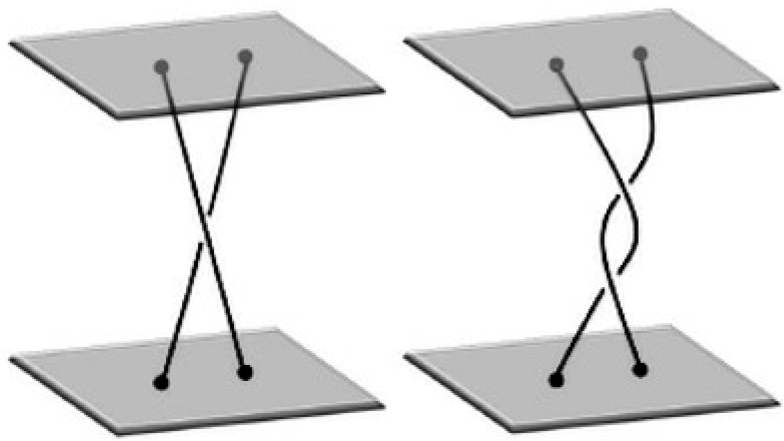
Asignaremos a cada una de estas trenzas un entero *N*. Por entero, quiero decir un número natural: 1, 2, 3... o 0; o un negativo de un número natural: -1, -2, -3...

En primer lugar, a la trenza identidad le asignaremos el número 0. En segundo lugar, si la hebra que comienza en el clavo izquierdo de la placa superior pasa por detrás de la otra hebra, le asignaremos el 1. Si la rodea, le asignaremos el 2, etcétera, como en los gráficos.



Si esta hebra pasa por delante de la otra hebra, asignaremos a la trenza el

número negativo -1; si la rodea de la manera descrita en el gráfico le asignaremos el -2, etcétera.



Llamemos, al número asignado a las trenzas de esta manera, «número de superposiciones». Si tenemos dos trenzas con el mismo número de superposiciones, podemos convertir una en la otra tan sólo «tirando» de las hebras. Por decirlo de otra manera: el número de superposiciones determina totalmente la trenza.

De modo que tenemos una correspondencia «uno a uno» entre trenzas con dos hebras y números enteros.

Aquí resulta útil tener en cuenta algo que suele darse por sentado: ¡el conjunto de todos los números enteros es, en sí mismo, un grupo! Presenta la propiedad de adición, el «elemento identidad» es el numero 0, y para cualquier entero N su inverso es $-N$. De modo que todas las propiedades de grupo enumeradas en el capítulo 2 quedan satisfechas. Efectivamente, tenemos que $N + 0 = N$ y que $N + (-N) = 0$.

Lo que hemos hallado es que el grupo de trenzas con dos hebras tiene la misma estructura que el grupo de números enteros.[26]

Ahora bien, en el grupo de los enteros, la suma de dos de ellos, *a* y *b*, es la misma sea cual sea su orden:

$$a + b = b + a.$$

Esto también es así en el grupo de trenzas B_2. A los grupos que satisfacen esta propiedad se les llama «conmutativos» o «abelianos» (en honor al matemático noruego Niels Henrik Abel).

En una trenza con 3 hebras o más, las hebras pueden entrecruzarse de un modo mucho más complicado que en la trenza con 2 hebras. El patrón no puede describirse ya meramente a partir del número de superposiciones (observe la gráfica anterior de una trenza con 5 hebras). El patrón en que se da la superposición es también importante. Además, resulta que la suma de dos trenzas con 3 o más hebras sí que depende del orden en que se realiza (es decir, de cuál de las dos hebras está arriba en el gráfico de suma de trenzas anteriormente visto). Es decir, en el grupo B_n para n = 3, 4, 5... tenemos que, en general,

$$a + b = b + a.$$

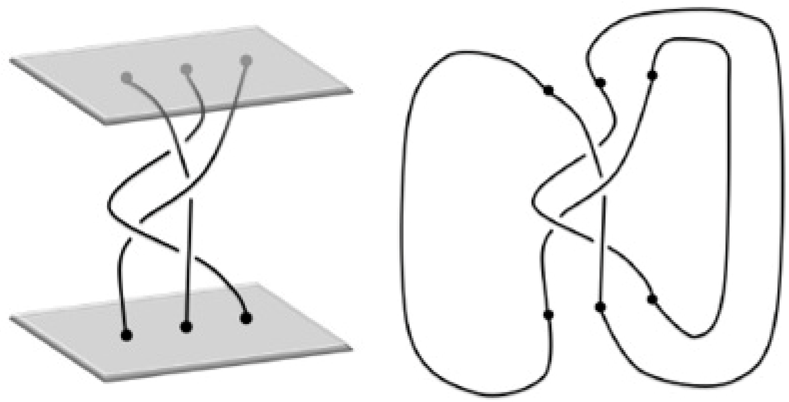
A estos grupos se les llama «no conmutativos» o «no abelianos».

Los grupos de trenzas tienen muchas aplicaciones prácticas importantes. Por ejemplo, se emplean para construir robustos y eficaces algoritmos de clave pública en encriptación.[27]

Otra dirección prometedora es el diseño de ordenadores cuánticos basados en la creación de complejas trenzas de partículas cuánticas llamadas aniones. Sus trayectorias se entrecruzan, y sus superposiciones se emplean para construir «puertas lógicas» para el ordenador cuántico.[28]

Existen también aplicaciones en biología. Dada una trenza con n hebras, podemos numerar los clavos de las dos placas de 1 a n, de izquierda a derecha. Luego, conectar los extremos de las hebras unidas a los clavos con el mismo número en ambas placas. Esto crea lo que los matemáticos llaman un

«enlace»: una unión de curvas cerradas que se entrecruzan.



En el ejemplo de esta ilustración sólo hay una curva cerrada. El nombre que le dan los matemáticos es «nudo». En general, habrá varias hebras cerradas.

En biología se emplea la teoría matemática de enlaces y nudos, por ejemplo, para el estudio de las uniones entre ADN y enzimas.[29] Vemos una molécula de ADN como una hebra, y la molécula de la enzima como otra hebra. Resulta que cuando se unen, pueden darse varios nudos, todos importantes, y que pueden alterar el ADN. La manera en que se entrecruzan es, por tanto, de gran importancia. El estudio matemático de los nudos resultantes arroja luz sobre los mecanismos de recombinación del ADN.

En matemáticas, las trenzas son también importantes debido a su interpretación geométrica. Para entenderlo, consideremos todas las posibles colecciones de n puntos en un plano. Supondremos que se trata de puntos diferenciados, es decir, que las posiciones de dos puntos cualesquiera en el plano han de ser distintas. Escojamos unos cuantos de esos puntos; concretamente, n puntos dispuestos en línea recta, con la misma distancia entre ellos. Pensemos en cada punto como en un bichito: cuando hacemos sonar la música, los bichitos cobran vida y comienzan a moverse por el plano. Si vemos el tiempo como la dirección vertical, la trayectoria de cada bichito parecerá una hebra. Si las posiciones en el plano son en todo momento

distintas (es decir, si suponemos que los bichitos no chocan) esas hebras nunca se cruzarán. Mientras la música suena, pueden moverse unos alrededor de los otros, como las hebras de una trenza. Sin embargo, exigimos que cuando la música deje de sonar (al cabo de un tiempo prefijado) los bichitos se alineen en una recta en el mismo orden que al comienzo, aunque se permite a cada bichito acabar en una posición que inicialmente ocupara otro de ellos.

Entonces, sus rutas colectivas parecerán una trenza con n hebras.

Por tanto, las trenzas con n hebras pueden verse como las trayectorias en el espacio de enjambres de n puntos distintos en un mismo plano.[30]

* * * *

El problema que Varchenko me dio, y en el que iba a comenzar a trabajar con Fuchs, concernía a una parte del grupo de trenzas, llamada «subgrupo conmutador». Recordemos que para trenzas de dos hebras hemos definido el número de superposición. Se puede asignar un número similar a una trenza con cualquier número de hebras.[31] Empleamos esto para definir el grupo conmutador B'_n de un grupo de trenzas con n hebras. Consiste en todas las trenzas cuyo número de superposición es cero.[32]

El problema que yo debía resolver era computar los llamados «números de Betti» del grupo B'_n. Estos números reflejan propiedades profundas de un grupo, importantes para sus aplicaciones. Por poner una analogía, pensemos en un objeto físico, como una casa. Tiene varias características: algunas más obvias, como la cantidad de pisos, habitaciones, ventanas, etc., y otras menos obvias, como las proporciones de los materiales con los que está construida. De igual manera, un grupo tiene varias características, y esas son los números de Betti.[33] Fuchs había computado con anterioridad los números de Betti del grupo de trenzas B_n. Me pasó su trabajo para que yo aprendiera las bases del tema.

En una semana estuve en condiciones de leer todo el estudio de Fuchs por mi

cuenta, buscando de vez en cuando conceptos y definiciones hasta entonces desconocidos para mí en, para entonces, mi nutrida biblioteca de matemáticas. Llamé a Fuchs.

—Ah, eres tú —dijo—. Estaba preguntándome cómo es que no llamabas. ¿Has comenzado a leer el artículo?

—Sí, Dmitry Borisovich. En realidad, ya lo he acabado.

—¿Acabado? —Fuchs parecía sorprendido—. Bueno, entonces deberíamos encontrarnos. Quiero saber lo que has aprendido.

Fuchs sugirió que nos viéramos al día siguiente en la MGU, tras un seminario al que iba a asistir. Mientras me preparaba para el encuentro, releía el artículo y ejercitaba para el tipo de preguntas que pensaba que Fuchs me haría. Un matemático de clase mundial como Fuchs no iba a tomar a un nuevo estudiante sólo por compasión. El listón estaba muy alto. Comprendí que mi primera conversación con Fuchs sería algo así como un examen, y por eso estaba tan deseoso de causar una buena impresión.

Nos encontramos a la hora establecida y caminamos por los pasillos de Mekh-Mat hasta hallar un banco en el que no nos molestaran. Tras sentarnos comencé a explicarle a Fuchs lo que había aprendido de su artículo. Él me escuchó con atención, haciéndome alguna pregunta de vez en cuando. Creo que le gustaba lo que oía. Tenía curiosidad por saber dónde había aprendido todo aquello, y le conté de mis estudios con Yevgueni Yevguénievich, la lectura de libros y mi asistencia a conferencias en Mekh-Mat. Incluso hablamos de mi examen en la MGU (lo cual, por supuesto, no resultaba algo nuevo para Fuchs).

Por suerte, nuestro encuentro fue bien. Fuchs parecía impresionado por mis conocimientos. Me dijo que yo ya estaba preparado para enfrentarme al problema de Varchenko y que me ayudaría con él.

Aquella tarde, mientras abandonaba el edificio de la MGU, estaba exultante. Iba a comenzar a trabajar en mi primer problema matemático, guiado por uno de los mejores matemáticos del mundo. Habían pasado menos de dos años desde mi examen de ingreso en Mekh-Mat. Volvía a entrar en el juego.

Capítulo 6
Aprendiz de matemático

Resolver un problema matemático es como completar un rompecabezas, sólo que no sabes de antemano cómo será la imagen final. Podría ser difícil, podría ser fácil o podría ser imposible de resolver. Nunca lo sabrás hasta que lo hagas (o te des cuenta de que es imposible de hacer). Esta incertidumbre es, quizá, el aspecto más difícil de ser un matemático. En otras disciplinas se puede improvisar, inventar nuevas soluciones, incluso cambiar las reglas del juego. Ni siquiera la noción de qué constituye una solución está claramente definida. Por ejemplo, si se nos encomienda aumentar la productividad de una compañía, ¿qué medida empleamos para determinar el éxito? ¿Contará un incremento del 20% como un éxito? ¿Y un 10%? En matemáticas, el problema está siempre bien definido, y no hay ninguna ambigüedad en cuanto a qué es resolverlo. O lo resuelves o no.

Para el problema de Fuchs tenía que computar los números de Betti del grupo B'_n. No había ambigüedad en cuanto a qué significa esto. Significa lo mismo hoy en día, para cualquiera familiarizado con el lenguaje matemático, que significaba en 1986, cuando por primera vez me enfrenté al problema, y seguirá significando lo mismo dentro de cien años.

Sabía que Fuchs había solucionado un problema similar y sabía cómo lo había hecho. Me preparé para mi propia tarea mediante problemas análogos para los que ya se sabían las soluciones. Esto me proporcionó intuición y habilidades y me equipó con métodos de resolución. Pero no podía saber *a priori* cuál de esos métodos funcionaría, ni de qué manera enfocar el problema, o siquiera si podría solucionarlo sin crear una técnica completamente nueva o un método totalmente diferente.

Este dilema acosa a todos los matemáticos. Fijémonos en uno de los problemas matemáticos más famosos de la historia, el último teorema de Fermat, para ver cómo uno puede hacer de matemático cuando el problema es fácil de

enunciar pero la solución es mucho menos que obvia.

Cojamos un número natural n, es decir, 1, 2, 3... y consideremos la siguiente ecuación:

$$x^n + y^n = z^n$$

con los números naturales x, y y z.

Si $n = 1$, tendremos la ecuación:

$$x + y = z,$$

que seguramente tiene muchas soluciones entre los números naturales: tan sólo tome cualquier x y cualquier y y establezca $z = x + y$. Fíjese que aquí empleamos la misma operación de suma de números naturales de la que hablamos en el capítulo previo.

Si $n = 2$, tenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Esta ecuación tiene muchas soluciones en números naturales, por ejemplo:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Todo esto se ha sabido desde la Antigüedad. Lo que no se sabía era si la ecuación tenía soluciones para n mayor que 2. Parece bastante sencillo, ¿no? ¿Cuán difícil puede resultar contestar a una pregunta así?

Pues, como acabaría viéndose..., bastante difícil. En 1637, un matemático francés, Pierre Fermat, dejó una nota en el margen de un viejo libro diciendo que si n es mayor que 2, la ecuación no tenía soluciones x, y y z que fueran números naturales. En otras palabras, que no podemos hallar tres números

naturales x, y y z tales que

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

que no podemos hallar tres números naturales x, y y z tales que

$$x^4 + y^4 = z^4,$$

etcétera.

Fermat escribió que había hallado una sencilla prueba de lo que decía, para todos los números n mayores que 2, «pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla». Mucha gente, desde matemáticos profesionales a *amateurs*, tomó la nota de Fermat como un desafío e intentó reproducir su «prueba», haciendo de este el problema matemático más famoso de todos los tiempos. Se anunciaron premios. Se escribieron y publicaron cientos de pruebas sólo para ser rechazadas posteriormente. El problema permanecía irresuelto trescientos cincuenta años después.

En 1993, un matemático de Princeton, Andrew Wiles, anunció su propia demostración del último teorema de Fermat. Pero su prueba, a primera vista, no tenía nada que ver con el problema original. En lugar de poner a prueba el último teorema de Fermat, Wiles se había enfrentado a la llamada «conjetura Shimura-Taniyama-Weil», que es algo completamente diferente y mucho más complicado de explicar. Pero unos pocos años antes, un matemático de Berkeley llamado Ken Ribet había demostrado que la declaración de esta conjetura implicaba que el último teorema de Fermat era cierto. Por eso, una prueba de la conjetura demostraría también el último teorema de Fermat. Hablaremos de todo esto en detalle en el capítulo 8; lo que quiero explicar ahora es que lo que parece un problema sencillo puede no tener necesariamente una solución elemental. Hoy en día está claro que Fermat no pudo haber demostrado el teorema que se le atribuye. Se tuvieron que crear

campos enteros de las matemáticas para poder hacerlo, una creación que aprovechó el duro trabajo de muchas generaciones previas de matemáticos.[34] Pero ¿es posible predecir todo eso a partir de esta ecuación de aspecto inocente?

$$x^n + y^n = z^n$$

¡En absoluto!

Nunca se sabe, con ningún problema matemático, lo que se necesitará para solucionarlo. Esperas y rezas por ser capaz de hallar una solución bonita y elegante, y descubrir, quizá, algo interesante a lo largo del camino. Y ciertamente esperas ser capaz de hacerlo en un período razonable de tiempo, y no tener que esperar trescientos cincuenta años para llegar a la conclusión. Pero nunca puedes estar seguro.

En el caso de mi problema, tuve suerte: había una solución elegante, y fui capaz de hallarla en un período de tiempo relativamente corto, unos dos meses. Pero no me llegó con facilidad. Nunca lo hace. Probé muchos métodos diferentes. Conforme iban fracasando, mi frustración y ansiedad aumentaban. Era mi primer problema, e inevitablemente yo me preguntaba si podría ser un matemático. Era mi primer examen para ver si tenía lo que hacía falta.

Trabajar en el problema no me excusaba de asistir a clases ni rendir exámenes en Kerosinka, pero mi máxima prioridad era el problema, y pasé incontables horas con él, noches y fines de semana. Me presionaba a mí mismo demasiado. Empezaba a tener dificultades para dormir: era la primera vez que me ocurría. El insomnio que contraje mientras trabajaba en este problema fue el primer «efecto secundario» de mi investigación matemática. Me siguió durante muchos meses después, y desde ese momento nunca más me he permitido obsesionarme hasta tal punto por un problema matemático.

Me reunía con Fuchs semanalmente en el edificio de Mekh-Mat, donde le informaba de mis progresos (o falta de ellos). Para entonces me había

conseguido una identificación, así que ya no tenía que colarme por la verja. Fuchs siempre me apoyó y animó, y siempre que nos encontrábamos me explicaba algún truco nuevo o me sugería una nueva reflexión que yo intentaba aplicar al problema.

Y entonces, de repente, lo tuve. Encontré la solución, o, para ser exactos, la solución se presentó por sí sola, en todo su esplendor.

Estaba intentando emplear uno de los métodos estándar para computar números de Betti, que Fuchs me había enseñado, llamado «secuencia espectral». Era capaz de aplicarlo hasta cierto punto, lo que me permitió, en principio, computar los números de Betti del grupo B'_n, a partir del conocimiento de los números de Betti de todos los grupos B'_m en que $m < n$. El problema era, evidentemente, que yo tampoco sabía cuáles eran esos otros números de Betti.

Pero esto me dio una manera de abordar el problema: si podía *adivinar* la respuesta correcta, lo que tendría que hacer después sería *demostrarla* siguiendo ese método.

Es fácil de decir, pero llegar a esa conclusión requirió muchos cómputos de prueba, que se hacían cada vez más complicados. Durante un largo tiempo no pareció surgir ningún patrón.

De repente, como en un hechizo de magia negra, lo tuve todo claro. El rompecabezas estaba completo, y se me reveló a la vista la imagen final, llena de elegancia y belleza, en un momento que siempre recordaré con cariño. Fue un increíble momento de elevación que hacía que todas aquellas noches sin dormir valieran la pena.

Por primera vez en mi vida estaba en posesión de algo que nadie más en el mundo tenía. Era capaz de decir algo nuevo acerca del universo. No era un remedio para el cáncer, pero era un valioso pedacito de conocimiento, y nadie nunca me lo podría quitar.

Cuando uno experimenta esta sensación una vez, quiere volver a repetirla. Era la primera vez que me ocurría, y, como un primer beso, fue muy especial.

Sabía que ya podía llamarme a mí mismo matemático.

La respuesta fue algo bastante inesperado, y mucho más interesante que nada que Fuchs o yo pudiéramos imaginar. Hallé que por cada divisor del número natural *n* (el número de hebras de la trenza en cuestión) hay un número de Betti del grupo B'_n que es igual a la famosa «función de Euler» de dicho divisor.[35]

La función de Euler asigna a cualquier número natural *d* otro número natural, llamado $\varphi(d)$. Este es el número de enteros entre 1 y *d* que son primos relativos («coprimos») con *d*; es decir, que no tienen divisores comunes con *d* (aparte de 1, por supuesto).

Por ejemplo, tomemos $d = 6$. En este caso, 1 es coprimo con 6; 2 no lo es (es divisor de 6); 3 tampoco (es divisor de 6); 4 tampoco lo es (4 y 6 comparten un divisor común: 2); 5 es coprimo con 6 y 6 no lo es. De modo que hay dos números naturales entre 1 y 6 que son coprimos con 6, a saber: 1 y 5. De aquí que la función de Euler de 6 es igual a 2. Lo escribimos así: $\varphi(6) = 2$.

La función de Euler tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, se emplea en el llamado algoritmo RSA que se utiliza para encriptar los números de las tarjetas de crédito en transacciones *online* (esto se explica en la nota 7 del capítulo 14). Se la llama así en honor al matemático suizo del siglo XVIII Leonhard Euler.

El que los números de Betti que hallé fueran dados por la función de Euler sugería la existencia de conexiones ocultas entre grupos de trenzas y teoría de números. Por lo tanto, el problema que acababa de solucionar podía tener potenciales implicaciones mucho más allá de su ámbito inicial.

Evidentemente, yo estaba ansioso por enseñarle a Fuchs mis resultados. Era ya junio de 1986, casi tres meses después de nuestro primer encuentro. Para entonces, Fuchs había abandonado Moscú, con su mujer y sus dos hijas, para pasar el verano en su dacha no muy lejos de la ciudad. Por suerte para mí, estaba situada a lo largo de la misma línea férrea que mi ciudad natal, a medio camino, de modo que me fue fácil visitarle de vuelta a casa.

Tras ofrecerme la taza de té de costumbre, Fuchs me preguntó por mis

progresos.

—¡He resuelto el problema!

No podía contener mi entusiasmo, y supongo que la explicación de la prueba que le di resultó bastante dispersa e inconexa. Pero no había ningún problema: Fuchs lo comprendió todo rápidamente. Estaba encantado.

—Esto es genial —dijo—. ¡Bien hecho! Ahora has de comenzar a escribir el artículo al respecto.

Era la primera vez que yo escribía un artículo matemático para su publicación, y resultó ser no menos frustrante que mi trabajo matemático, y mucho menos divertido. Buscar nuevos patrones en los límites del conocimiento era algo cautivador y fascinante. Sentarme en mi escritorio, intentando organizar mis pensamientos y ponerlos sobre papel era un proceso completamente diferente. Como alguien me dijo más tarde, escribir artículos académicos era el castigo que había que sufrir a cambio de la emoción de descubrir nuevas matemáticas. Era la primera vez que me castigaban así.

Volví a ver a Fuchs con diferentes esbozos, y él los leyó con detenimiento, señalando las deficiencias y sugiriendo mejoras. Como siempre, fue extremadamente generoso a la hora de ayudar. Desde el comienzo puse su nombre como uno de los coautores, pero él lo rechazó de plano:

—Este es tu artículo —decía.

Finalmente, Fuchs declaró que el artículo estaba listo y me dijo que debería enviarlo a *Análisis funcional y aplicaciones*, la publicación matemática dirigida por Israel Moiseévich Gelfand, el patriarca de la escuela matemática soviética. Gelfand, un hombre compacto y carismático, por aquel entonces recién inaugurada la setentena, era una leyenda en la comunidad matemática moscovita. Dirigía un seminario semanal en el gran auditorio de la decimocuarta planta del edificio principal de la MGU. Se trataba de un importante acontecimiento matemático y social, que se venía celebrando desde hacía más de cincuenta años y que tenía renombre a nivel mundial. Fuchs era un antiguo colaborador de Gelfand (su trabajo, en lo que se acabaría

llamando «cohomología Gelfand-Fuchs», era ampliamente conocido y apreciado) y uno de los miembros de más antigüedad del seminario de Gelfand (entre los otros estaban A. A. Kirílov, exestudiante de Gelfand, y M. I. Graev, histórico colaborador durante años de Gelfand).

El seminario era diferente a cualquier otro seminario al que yo hubiera acudido. Por norma general, un seminario tiene una duración fija (en Estados Unidos, entre una hora y una hora y media) y un presentador que prepara una charla acerca de un tema determinado con antelación. En ocasiones, alguien del público hace preguntas. El seminario de Gelfand no tenía nada que ver con todo eso. Se reunía todos los lunes por la tarde y el horario oficial de apertura era a las 19.00 horas. Sin embargo, el seminario rara vez comenzaba antes de las 19.30, y generalmente empezaba entre las 19.45 y las 20.00. Durante la hora (más o menos) antes de su comienzo, los invitados (y el propio Gelfand, que solía llegar entre las 19.15 y las 19.30) se paseaban y charlaban por el auditorio y el vestíbulo. Era, evidentemente, la idea original de Gelfand: un seminario tanto como un acontecimiento social.

La mayoría de matemáticos que acudían al seminario de Gelfand trabajaban en lugares no afiliados con la MGU. El seminario de Gelfand era el único lugar en el que podían reunirse con sus colegas, averiguar qué se cocía en el mundo de las matemáticas, compartir ideas y forjar colaboraciones. Dado que el propio Gelfand era judío, su seminario se consideraba un «refugio seguro» para judíos, e incluso se lo celebraba como «el único de la ciudad» (o uno de los pocos) en que matemáticos judíos podían participar (aunque, para ser justos, había muchos otros seminarios en la MGU abiertos al público y dirigidos por gente sin prejuicios de tipo étnico). Sin duda, Gelfand aprovechaba esto.

El antisemitismo que yo había experimentado en los exámenes de ingreso a la MGU se extendía a todos los niveles del mundo académico de la Unión Soviética. Con anterioridad, en la década de 1960 y principios de 1970, aunque había habido restricciones (o «cuotas») para estudiantes de origen judío, aún podían acceder como estudiantes al Mekh-Mat. La situación fue empeorando

desde los años setenta hasta los ochenta, hasta el punto de que en 1984, cuando solicité el ingreso en Mekh-Mat, casi no se aceptaban estudiantes judíos.[36] Pero incluso en aquellos tiempos, a aquellos estudiantes les resultaba casi imposible cursar estudios de posgrado. La única manera en que un estudiante judío podía conseguirlo era ir a trabajar tres años fuera, tras la licenciatura, y que el empleador lo enviara a un curso de posgrado (a menudo en alguna provincia lejana). E incluso si conseguían superar este obstáculo y conseguir un doctorado, les resultaba imposible conseguir un puesto académico de matemáticos en Moscú (por ejemplo, en la MGU). O bien tenían que conformarse con un trabajo en alguna provincia o trabajar en alguno de los muchos institutos de Moscú que tenían poco o nada que ver con las matemáticas. La situación era incluso más difícil para quienes no procedían de Moscú, puesto que carecían de *propiska*, el sello de residencia en Moscú en su pasaporte interior, exigido para cualquier trabajo en la capital.

Incluso los estudiantes más excepcionales recibían este tratamiento. Vladimir Drinfeld, un brillante matemático y futuro ganador de la Medalla Fields,[xii] de quien hablaremos posteriormente, consiguió entrar como estudiante de posgrado en Mekh-Mat tras obtener su licenciatura (aunque, por lo que tengo entendido, fue complicadísimo de conseguir), pero al ser natural de Járkov, Ucrania, le resultó imposible conseguir un puesto de trabajo en Moscú. Tuvo que conformarse con un puesto docente en una universidad provincial de Ufa, una ciudad industrial en los montes Urales. Con el tiempo consiguió un trabajo como investigador en el Instituto de Física de Bajas Temperaturas de Járkov.

Quienes se quedaban en Moscú acababan empleados en lugares como el Instituto de Estudios Sísmicos o el Instituto para el Procesado de Señales. Sus trabajos consistían en tediosos cálculos relacionados con alguna industria en particular a la que estaba vinculado el instituto (aunque algunos, de

---

[xii] La Medalla Internacional para Descubrimientos Sobresalientes en Matemáticas, comúnmente llamada Medalla Fields en honor al matemático canadiense John Charles Fields, es el equivalente al premio Nobel de esta disciplina; la concede cada cuatro años la Unión Matemática Internacional desde 1936. (*N. del t.*).

multifacético talento, conseguían abrir nuevos caminos en esas áreas). Tenían que realizar el tipo de investigación matemática que constituía su verdadera pasión en su tiempo libre.

El propio Gelfand fue expulsado de su trabajo docente en Mekh-Mat en 1968, tras firmar la famosa carta de noventa y nueve matemáticos en demanda de la liberación del matemático y activista por los Derechos Humanos Aleksándr Esenin-Volpin (hijo del poeta Sergéi Esenin) de una pena políticamente motivada que cumplía en un hospital psiquiátrico. Aquella carta estuvo tan hábilmente escrita que, tras su emisión por la radio de la BBC, la condena mundial puso en tal apuro a los líderes soviéticos que liberaron a Esenin-Volpin casi de inmediato.[37] Pero también enfadó gravemente a las autoridades. Posteriormente encontraron maneras de castigar a todos los firmantes. Muchos de ellos, en especial, fueron despedidos de sus trabajos.[38]

De modo que Gelfand ya no era profesor de matemáticas en la MGU, aunque había sido capaz de conservar su seminario en el edificio principal. Su empleo oficial era en un laboratorio de la MGU que él mismo había fundado para realizar investigaciones en biología, otra de sus pasiones.[xiii] Fuchs trabajaba en el mismo laboratorio.

Anteriormente Fuchs me había urgido a que comenzara a acudir al seminario de Gelfand, así que asistí a un par de sesiones a finales del semestre de primavera. Esas reuniones me impresionaron mucho. Gelfand dirigía su seminario del modo más autoritario imaginable. Él decidía sobre todos los aspectos del mismo, y aunque a un ojo desentrenado le pudiera parecer caótico y desorganizado, en realidad dedicaba una gran cantidad de tiempo y energía a preparar y coreografiar los encuentros semanales.

Tres años después, cuando Gelfand me pidió que hablara de mi trabajo, tuve la

---

[xiii] Vale la pena también hacer constar que Gelfand no fue escogido miembro de pleno derecho de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética hasta mediados de la década de 1980, porque la Rama Matemática de la Academia estuvo durante decenios controlada por el director del Instituto Matemático Steklov de Moscú, Ivan Matveevich Vinógradov, apodado «El antisemita en jefe de la Unión Soviética». Vinógradov había instaurado una draconiana política antisemita en la Academia y en el Instituto Steklov, que estuvieron bajo su poder durante casi cincuenta años. (*N. del a.*).

oportunidad de ver desde dentro cómo funcionaba el seminario. Pero de momento lo hacía desde el punto de vista de un chico de diecisiete años que apenas comenzaba su carrera de matemático.

El seminario era, en muchos sentidos, un teatro para un solo actor. Oficialmente había un conferenciante designado para hablar de un tema específico, pero generalmente sólo una parte del seminario se dedicaba a eso. Gelfand solía sacar otros temas y llamar a la pizarra a otros matemáticos, a quienes no se les había pedido que preparasen nada por adelantado, para que los explicasen. Pero él se encontraba siempre en el centro de todo. Él, y sólo él, controlaba el flujo del seminario y tenía el poder absoluto para interrumpir a quien hablaba en cualquier momento con preguntas, sugerencias y comentarios. Casi puedo oírle todavía decir «Dayte opredelenie» («Dé la definición»), su frecuente advertencia a un conferenciante.

Tenía también la costumbre de arrojarse a largos monólogos acerca de varios temas (a veces sin ninguna relación con el material que se debatía) y contar chistes, anécdotas e historias de todo tipo, muchas de ellas realmente entretenidas. Fue aquí donde escuché por primera vez la anécdota que he mencionado en el prefacio: puede que un borracho no sepa qué número es mayor, 2/3 o 3/5, pero sabe que 2 botellas de vodka para 3 personas es mejor que 3 botellas de vodka para 5 personas. Una de las habilidades de Gelfand era «redefinir» preguntas que se hacían otros de manera que la respuesta fuera obvia.

Otro chiste que le gustaba contar tenía que ver con el telégrafo sin cables. «A principios del siglo XX, alguien pregunta a un físico, en una fiesta:

—¿Nos podría explicar cómo funciona?

El físico responde que es muy sencillo.

—Primero hay que comprender el telégrafo normal, con cables: imagine un perro con la cabeza en Londres y su cola en París. Usted tira de la cola en París y el perro ladra en Londres. El telégrafo sin cables —explica el físico— es lo mismo, pero sin el perro».

Tras contar el chiste y esperar a que las risas se acabaran (incluso las de quienes lo habían oído mil veces), Gelfand se volvía hacia el problema matemático que se estaba debatiendo. Si creía que la solución requería un enfoque radicalmente nuevo, decía:

—Lo que intento decir es que necesitamos hacerlo sin el perro.

Una técnica frecuentemente empleada en el seminario era nombrar a un *kontrol'nyj slushatel'* («un oyente de prueba»), habitualmente algún joven del público, a quien se pedía que repitiera cada cierto tiempo lo que explicaba el conferenciante. Si se estimaba que el «oyente de prueba» seguía bien la conferencia, era que el conferenciante estaba realizando un buen trabajo. De lo contrario, el conferenciante debía frenar y explicarse mejor. A veces, Gelfand echaba del atril a un conferenciante especialmente incomprensible y lo sustituía por otro miembro del público. Y, evidentemente, Gelfand también tomaba el pelo al oyente de prueba. Todo esto hacía que el seminario fuera muy entretenido.

La mayor parte de seminarios se desarrollan a un ritmo regular, con los miembros del público escuchando (y a veces durmiéndose) de modo correcto, demasiado complaciente, demasiado cívico, o sencillamente temerosos de hacer ninguna pregunta al conferenciante, y posiblemente aprendiendo poco. No cabe duda de que el ritmo irregular y el carácter en general subversivo del seminario de Gelfand no sólo mantenía a la gente despierta (una tarea nada fácil, teniendo en cuenta que a veces se extendía hasta pasada la medianoche), sino que la estimulaba de tal modo que otros seminarios sencillamente no podían. Gelfand exigía mucho a sus conferenciantes. Trabajaban duro, y él también. Uno puede decir lo que quiera del estilo de Gelfand, pero lo cierto es que la gente nunca abandonaba el seminario con las manos vacías.

Sin embargo, me da la impresión de que un seminario como este sólo podía existir en una sociedad totalitaria como la Unión Soviética. La gente estaba acostumbrada al tipo de poderes y conducta dictatoriales que exhibía Gelfand. Podía ser cruel, a veces incluso insultante, con la gente. No creo que en

Occidente muchos tolerasen este tipo de tratamiento. Pero en la Unión Soviética no se consideraba nada fuera de lo común, y nadie protestaba. (Otro ejemplo igual de famoso era el seminario de Lev Landau sobre física teórica).

Cuando comencé a acudir al seminario, Gelfand tenía a un joven físico, Vladimir Kazakov, presentando una serie de charlas acerca de los llamados modelos de matrices. Kazakov empleaba métodos de física cuántica de manera novedosa para obtener profundos resultados matemáticos que los matemáticos no podían obtener por medios más convencionales. A Gelfand siempre le había interesado la física cuántica, y era un tema que tradicionalmente había desempeñado un papel importante en su seminario. Estaba especialmente impresionado por el trabajo de Kazakov, a quien promovía activamente entre los matemáticos. Como muchas de sus visiones, resultó ser acertada: unos años después, este trabajo se hizo famoso, se puso de moda y llevó a muchos importantes avances tanto en física como en matemáticas.

En sus conferencias en el seminario, Kazakov hacía un esfuerzo admirable por explicar sus ideas a los matemáticos. Gelfand tenía más deferencia de la habitual hacia él, y le dejaba hablar sin interrupciones mucho más que a otros conferenciantes.

Mientras tenían lugar estas sesiones, llegó un nuevo artículo, de John Harer y Don Zagier, en el que daban una elegante solución a un problema de combinatoria especialmente difícil.[39] Zagier tiene reputación de resolver problemas aparentemente intratables; también es muy rápido. Se decía que la solución a este problema le había costado seis meses, algo de lo que estaba muy orgulloso. En el siguiente seminario, mientras Kazakov continuaba su presentación, Gelfand le pidió que resolviera el problema Harer-Zagier empleando su trabajo en los modelos de matrices. Gelfand había presentido que los métodos de Kazakov se podían emplear para solucionar este tipo de problemas, y tenía razón. Kazakov no conocía el artículo de Harer-Zagier, y era la primera vez que escuchaba el problema. De pie ante la pizarra, lo pensó durante un par de minutos e inmediatamente escribió el lagrangiano de una

teoría de campos cuánticos que llevaría a la respuesta empleando sus métodos.

El público al completo estaba estupefacto. Pero Gelfand, no. Preguntó inocentemente a Kazakov:

—Volodya, ¿cuántos años has estado trabajando en este tema?

—No estoy seguro, Israel Moiseévich, quizá unos seis años.

—De modo que has tardado seis años más dos minutos, mientras que a Don Zagier le ha costado seis meses… ¿Te das cuenta de que es mejor que tú?

Y esta era una broma «suave» comparada con otras. En este entorno había que tener una piel muy gruesa para sobrevivir. Lamentablemente, algunos conferenciantes se tomaban este tipo de «despelleje» como algo personal, y esto les causaba mucho dolor. Pero he de añadir que Gelfand tenía la lengua más afilada para los matemáticos viejos y ya establecidos, y que era mucho más suave con los matemáticos jóvenes y los estudiantes.

Solía decir que daba la bienvenida al seminario a todos los estudiantes universitarios, a los estudiantes de posgrado con talento y tan sólo a los profesores brillantes. Comprendía que, a fin de mantener en movimiento el tema, era muy importante preparar a las siguientes generaciones de matemáticos, y siempre se rodeaba de jóvenes talentos. También lo mantenían joven: estuvo realizando investigaciones de máximo nivel de forma activa hasta muy pasados los ochenta años. A menudo invitaba a estudiantes de secundaria al seminario y los hacía sentarse en las primeras filas para asegurarse de que seguían lo que ocurría. Evidentemente, no se trataba de estudiantes de secundaria comunes: muchos de ellos acabarían convirtiéndose en matemáticos de renombre mundial.

Según todas las fuentes, Gelfand fue siempre muy generoso con sus estudiantes, y pasaba horas hablando con ellos de manera regular. Muy pocos profesores hacen eso. No era fácil ser su estudiante; otorgaba una especie de amor rudo, y había que aguantar sus muchas manías y hábitos dictatoriales. Pero mi impresión, por lo que hablé con varios de ellos, era que le eran leales

y que sentían que tenían una enorme deuda hacia él.

Yo no era estudiante de Gelfand: era su «re-estudiante», puesto que mis dos profesores, Fuchs y Feigin (que aún no había entrado en mi vida) habían sido, al menos en parte, estudiantes de Gelfand. Por ello siempre me consideré parte de la «escuela matemática de Gelfand». Mucho más tarde, cuando ambos estábamos en Estados Unidos, Gelfand me preguntó directamente acerca de ello, y por el orgullo y la satisfacción que vi en su cara cuando le dije que sí, me di cuenta de lo importante que era para él el tema de su escuela y el reconocimiento por parte de quien pertenecía a ella.

Esta escuela, de la que el seminario era el punto focal, su ventana al mundo, tuvo un enorme impacto no sólo en los matemáticos de Moscú, sino en todo el mundo. Matemáticos extranjeros venían a Moscú para conocer a Gelfand y acudir a su seminario, y muchos consideraban un honor dar una conferencia en él.

La fascinante, excesiva personalidad de Gelfand jugaba un papel importante en la reputación del seminario. Unos años después se interesó por mi trabajo y me pidió que hablara en su seminario. Pasé muchas horas conversando con él, no sólo acerca de matemáticas, sino de muchos otros temas. Estaba muy interesado en la historia de las matemáticas y en su propio legado en especial. Recuerdo vívidamente cómo, cuando fui a visitarlo a su apartamento de Moscú por primera vez (yo acababa de cumplir veintiún años), me informó de que se consideraba a sí mismo el Mozart de las matemáticas.

—A la mayoría de compositores se les recuerda por alguna pieza en particular que crearon —me dijo—. En el caso de Mozart, no es así: es la totalidad de su obra la que le convierte en un genio.

Hizo una pausa y continuó:

—Lo mismo vale para mi obra matemática.

Dejando aparte algunas cuestiones interesantes provocadas por una autovaloración como esa, me parece que se trata, en realidad, de una comparación válida. Aunque Gelfand no demostrara ninguna famosa conjetura

de las que duran años y años, como el último teorema de Fermat, el efecto acumulativo de sus ideas era impresionante. Más importante quizá, Gelfand poseía un excelente gusto por las matemáticas elegantes, así como una astuta intuición acerca de qué áreas de las matemáticas eran las más interesantes y prometedoras. Era como un oráculo con la capacidad de predecir en qué direcciones se moverían las matemáticas.

En una asignatura que estaba fracturándose y especializándose cada vez más, él era uno de los últimos hombres del Renacimiento, capaces de hacer de puente sobre varias áreas. Era el ejemplo perfecto de la unidad de las matemáticas. A diferencia de muchos seminarios, que se especializaban en un área de las matemáticas, si ibas al de Gelfand podías ver cómo encajaban todas esas partes. Es por eso por lo que nos reuníamos los lunes en el auditorio del piso catorce del edifico principal de la MGU y esperábamos ansiosos las palabras del maestro.

Y fue a este hombre que inspiraba admiración a quien Fuchs me sugirió enviar mi primer artículo de matemáticas. La revista de Gelfand, *Análisis funcional y aplicaciones*, se publicaba en forma de cuatro delgados números al año, de unas cien páginas cada uno (una cantidad lastimosa para una revista como esta, pero el editor se negaba a dar más, así que había que adaptarse), y poseía una reputación muy alta en todo el mundo. Se traducía al inglés y muchas bibliotecas científicas de todo el mundo estaban suscritas.

Era muy difícil conseguir que esta revista publicara un artículo, en parte debido a las enormes limitaciones del número de páginas. Había, en realidad, dos tipos de artículos que se publicaban: los de investigación, de unas quince a veinte páginas cada uno, con pruebas detalladas, y anuncios cortos en que sólo se indicaban los resultados, sin pruebas. Los anuncios no podían exceder las dos páginas. En teoría, a un artículo tan corto le debía suceder posteriormente un artículo detallado con todas las pruebas, pero, de hecho, a menudo esto no ocurría porque publicar un artículo más largo era extraordinariamente difícil. En efecto, era casi imposible para un matemático de la Unión Soviética publicar

en el extranjero (se necesitaban todo tipo de pases de seguridad, que tardaban más de un año y mucho esfuerzo en conseguirse). Por otra parte, la cantidad de revistas matemáticas, en la Unión Soviética, era muy pequeña para la cantidad de matemáticos que había. Lamentablemente, muchas de ellas estaban controladas por varios grupos, que no permitían a los de fuera publicar, y también abundaba el antisemitismo en muchas de ellas.

Debido a todo esto se generó una cierta subcultura de artículos matemáticos en la Unión Soviética, a la que se dio en llamar «tradición rusa» de artículos matemáticos: una escritura extremadamente concisa, proporcionando pocos detalles. Lo que muchos matemáticos de fuera de la Unión Soviética no veían era que esto se debía a la necesidad, no a una elección deliberada.

Era este tipo de anuncio corto lo que Fuchs buscaba para mi primer artículo.

Gelfand debía cribar y aprobar todo artículo enviado a *Análisis funcional y aplicaciones*, incluidos los anuncios cortos. Si el artículo le gustaba, dejaba que el artículo pasara por el proceso estándar de arbitraje. Esto significaba que para que mi artículo se tuviese en cuenta, yo debía conocer a Israel Moiseévich en persona. Así que, antes de uno de los primeros seminarios del semestre de otoño de 1986, Fuchs nos presentó.

Gelfand me dio la mano, sonrió y dijo:

—Encantado de conocerte. He oído hablar de ti.

Yo estaba completamente deslumbrado. Juraría que veía un halo en torno a la cabeza de Gelfand.

Entonces este se giró y le pidió a Fuchs ver mi artículo, que Fuchs le entregó. Gelfand comenzó a pasar las páginas. Había cinco de ellas, que yo había copiado a limpio (lentamente, con dos dedos) en una máquina de escribir que tomé prestada en Kerosinka, y sobre las que había copiado las fórmulas a mano.

—Interesante —dijo Gelfand, mostrando aprobación—, pero ¿por qué es importante?

Fuchs comenzó entonces a explicar algo acerca de los discriminantes de

polinomios de grado *n* con raíces distintas, y de cómo mi resultado se podía emplear para describir la topología del fibrado del discriminante, y... Gelfand le interrumpió:

—Mitya —le dijo, empleando la forma diminutiva del primer nombre de Fuchs—, ¿sabes cuántos suscriptores tiene la revista?

—No, Israel Moiseévich, no lo sé.

—Más de mil... —Era un número bastante alto teniendo en cuenta lo especializado de la revista—. No puedo enviarte a cada suscriptor con cada número para que le expliques para qué sirve este resultado, ¿verdad?

Fuchs negó con la cabeza.

—Ha de explicarse bien en el artículo, ¿de acuerdo?

Gelfand se preocupó de decirle todo esto a Fuchs, como si fuera culpa suya. Luego nos dijo a los dos:

—Aparte de eso, el artículo me parece bueno.

Después me sonrió otra vez y se fue a hablar con alguna otra persona.

¡Menudo diálogo! Fuchs esperó a que Gelfand no pudiera oír y me dijo:

—No te preocupes, sólo quería impresionarte —(¡y vaya si lo hizo!)—. Tendremos que añadir un párrafo al principio para explicarlo, y luego probablemente lo publicará.

Era el mejor resultado posible. Tras añadir el párrafo requerido por Gelfand, envié oficialmente el artículo y acabó apareciendo en la revista.[40] Así se completó mi primer proyecto matemático. Había cruzado mi primer umbral y me encontraba al comienzo de una senda que me llevaría al mágico mundo de las matemáticas modernas.

Ese es el mundo que quiero compartir con usted.

Capítulo 7
Teoría de la Gran Unificación

La solución a mi primer problema fue, de alguna forma, mi iniciación en el templo de las matemáticas. De un modo un tanto casual, el siguiente proyecto matemático que realicé con Fuchs me llevó de pleno al Programa Langlands, una de las teorías matemáticas más profundas y fascinantes que han surgido en los últimos cincuenta años. Hablaré acerca de mi proyecto más tarde, pero mi objetivo, en este libro, es describir mucho más que mi experiencia personal. Es proporcionarle una idea de cómo son las matemáticas modernas, demostrarle que tratan, en realidad, de originalidad, imaginación, ideas innovadoras. Y el Programa Langlands es un gran ejemplo. Me gusta pensar en él como en una Teoría de la Gran Unificación de las matemáticas, porque descubre y saca a la luz misteriosos patrones compartidos por diferentes áreas de las matemáticas, y por tanto apunta a profundas e inesperadas conexiones entre ellos.

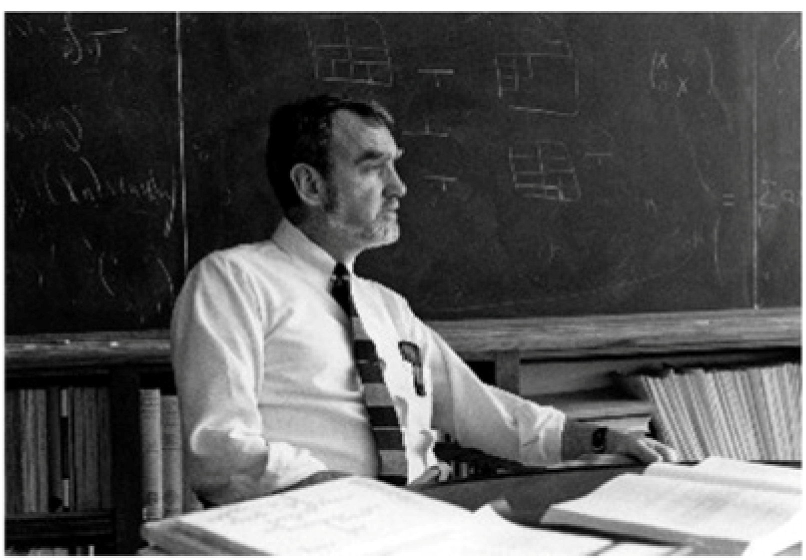
Las matemáticas constan de varios campos separados. A menudo parecen continentes diferentes, y es como si los matemáticos que trabajan en esas áreas hablaran idiomas distintos. Es por eso por lo que la idea de «unificación», de reunir las teorías procedentes de campos diversos y ver que forman parte de una narrativa única, es tan poderosa. Es como si uno se diera cuenta de repente que comprende otro idioma, que había estado intentando aprender desesperadamente y sin mucho éxito.

Es útil pensar en las matemáticas como en un gigantesco rompecabezas del que nadie sabe cómo será la imagen final. Resolver este rompecabezas es una tarea colectiva, de miles de personas. Trabajan en grupos: los de álgebra trabajan en su parte del puzle; los de teoría de números, los geómetras, etcétera. Cada grupo ha sido capaz de crear un pequeño «islote», un trozo de la gran composición, pero a lo largo de la mayor parte de la historia de las matemáticas ha sido difícil ver siquiera cómo unir esos islotes. Por ello, la

mayor parte de gente trabaja intentando expandir esas islas del rompecabezas. Sin embargo, de vez en cuando alguien ve cómo interconectar las islas. Cuando eso ocurre, surgen importantes rasgos de la imagen general, y eso da nuevos significados a los campos individuales.

Eso es lo que hizo Robert Langlands, pero su intención era más ambiciosa que la de juntar tan sólo algunos islotes. En lugar de ello, el Programa Langlands, que comenzó en la década de 1960, se ha convertido en la búsqueda por hallar el mecanismo mediante el cual construir puentes entre esos islotes, por escasa relación que parezcan tener.

Hoy en día Langlands es profesor emérito de matemáticas en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde ocupa el despacho que antaño tuviera Albert Einstein. Hombre de sorprendentes talento y visión, nació en 1936 y se crio en una ciudad pequeña cerca de Vancouver. Sus padres tenían un molino. Una de las cosas más sorprendentes acerca de Langlands es su facilidad para los idiomas: habla inglés, francés, alemán, ruso y turco, pese a que no hablaba ninguno (excepto su inglés natal) antes de ingresar en la universidad.[41]



Robert Langlands en su oficina de Princeton, en 1999. Fotografía de Jeff Mozzochi.

En años recientes he tenido la oportunidad de colaborar de cerca con Langlands y nos hemos escrito a menudo en ruso. En algún momento me envió una lista de autores rusos a los que había leído en idioma original. La lista era tan larga que me dio la impresión de haber leído más de mi literatura natal, la rusa, que yo mismo. A menudo me pregunto si la infrecuente facilidad para los idiomas de Langlands tendrá algo que ver con su capacidad para unir diferentes culturas matemáticas.

El punto clave del Programa Langlands es el concepto de simetrías, con el que estamos ya familiarizados. Hemos hablado de simetrías en geometría: por ejemplo, cualquier rotación es simetría de una mesa redonda. Nuestro estudio de esas simetrías nos ha llevado a la noción de grupo. Luego hemos visto que los grupos aparecen, en las matemáticas, con varios aspectos: como grupos de rotaciones, grupos de trenzas, etcétera. También hemos visto que los grupos fueron fundamentales para clasificar las partículas elementales y para predecir la existencia de los quarks. Los grupos relevantes para el Programa Langlands aparecen en el estudio de los números.

Para explicar esto, primero tenemos que hablar de los números que nos encontramos en nuestra vida cotidiana. Todos nacemos un año determinado, vivimos en una casa con un número determinado de la calle, tenemos un número de teléfono, un número PIN para acceder a nuestra cuenta bancaria desde el cajero automático, etcétera. Todos estos números tienen algo en común: todos se pueden obtener sumando 1 a sí mismo un número determinado de veces: 1 + 1 es 2, 1 + 1 + 1 es 3, etcétera. A estos se les llama números naturales.

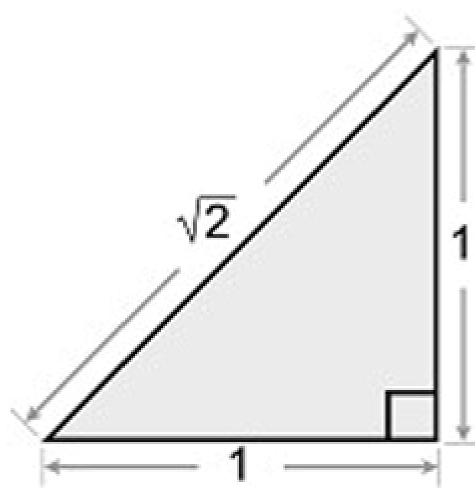
Tenemos también el número 0, así como los números negativos: -1, -2, -3... Como dijimos en el capítulo 5, a estos números los conocemos como «enteros». De modo que un número entero es un número natural, o el número 0, o el negativo de un número natural.

También nos encontramos con números un poco más generales. Un precio, en euros y céntimos, se suele representar así: 2,59 €, lo que significa 2 euros y 59

céntimos. Es lo mismo que 2 más la fracción 59/100, o 59 veces 1/100. A los números de este tipo los llamamos racionales o fracciones.

Un buen ejemplo de número racional es un cuarto: matemáticamente se representa mediante la fracción 1/4. De modo más general, podemos formar la fracción m/n a partir de dos números enteros cualesquiera, m y n. Si m y n tienen un divisor común (por ejemplo, d) podemos decir que $m = dm'$ y $n = dn'$. Podemos entonces suprimir d y escribir, en su lugar, m'/n' en lugar de m/n. Por ejemplo, 1/4 puede representarse como 25/100, y por eso en Estados Unidos se llama *quarter* («cuarto») a la moneda de 25 centavos.

La inmensa mayoría de los números que nos encontramos en la vida cotidiana son estos números racionales o fracciones. Pero hay otros números que no son racionales. Un ejemplo de ellos es la raíz cuadrada de 2, que escribimos de la siguiente manera: √2. Se trata del número que, elevado al cuadrado, da 2. Geométricamente, √2 es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1.



Resulta que no podemos representarlo como m/n en que m y n son dos números naturales.[42] Sin embargo, podemos aproximarlo mediante números racionales si escribimos los primeros dígitos de su forma decimal: 1,4142, luego 1,41421, después 1,414213, etcétera. Pero no importa cuántos dígitos añadamos, siempre será una aproximación: habrá más dígitos por poner. Ningún número decimal finito podrá jamás ser igual a √2.

Dado que √2 es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo arriba indicado, sabemos que el número está allí, en algún lugar. Pero, sencillamente, no encaja con el sistema numérico de números racionales.

Hay muchos otros números como este, como √3 o como la raíz cúbica de 2. Necesitamos desarrollar una manera sistemática de sumar estos números a los

números racionales. Pensemos en los números racionales como en una taza de té. Podemos beberlo por sí solo, pero nuestra experiencia mejorará si le añadimos azúcar, leche, miel, especias... y estos son como los números √2, √3, etcétera.

Intentemos añadir a la mezcla √2. Será el equivalente a añadir un terrón de azúcar en nuestra taza de té. Así que dejemos caer √2 en los números racionales y veamos qué tipo de sistema numérico obtenemos. Como queremos ser capaces de multiplicar los números de este nuevo sistema numérico, tendremos que incluir todos los números que sean productos de números racionales por √2. Estos tienen la forma

$$\frac{k}{l}\sqrt{2}$$

De modo que nuestro sistema numérico deberá incluir todas las fracciones m/n (los números racionales) y todos los números con el formato

$$\frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

Pero queremos ser capaces también de sumarlos, de modo que tendremos que incluir las sumas

$$\frac{m}{n}+\frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

El grupo de números de esta forma ya es «autosuficiente» en el sentido en que podemos efectuar las operaciones habituales con él (sumar, restar, multiplicar, dividir) y el resultado será un número del mismo tipo.[43] Es nuestra taza de té

con el terrón de azúcar completamente mezclado.

Resulta que este nuevo sistema numérico tiene una propiedad oculta que los números racionales no tenían. Esta propiedad será nuestra puerta al mágico mundo de los números. Resulta que este nuevo sistema numérico tiene simetrías.

Cuando digo «simetrías», en este caso, quiero decir una regla que asigna un nuevo número a cualquier número con el que comencemos. En otras palabras: una simetría dada transforma cada número en otro número del mismo sistema numérico. Diremos que una simetría es una regla por la que un número «va» a otro número. Esta regla debería ser compatible con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Aún no está claro por qué deberíamos preocuparnos por las simetrías de un sistema numérico. Por favor, tenga paciencia y en un momento verá por qué.

Nuestro sistema numérico posee la simetría identidad, es decir: la regla por la que todo número va a sí mismo. Es como la rotación de 0 grados de una mesa, en la que todos los puntos de la mesa van hacia sí mismos.

Resulta que nuestro sistema numérico tiene también una simetría no trivial. Para explicar en qué consiste eso, pensemos que √2 es una solución de la ecuación $x^2 = 2$. En efecto, si sustituimos x por √2 obtenemos una igualdad. Pero en realidad esta ecuación tiene dos soluciones. Una de ellas es √2 y la otra es -√2. Y, en realidad, añadimos ambas a los números racionales cuando construimos nuestro sistema numérico. Al intercambiar ambas soluciones, obtenemos una simetría en este sistema numérico.[xiv]

Para explicar esto más a fondo en términos de nuestra analogía de la taza de té, modifiquémosla un poco. Digamos que echamos en nuestra taza un terrón de azúcar blanco y uno de azúcar moreno y los mezclamos con el té. El primero es como √2 y el segundo como -√2. Obviamente, intercambiarlos no

[xiv] Nótese que empleo, aquí y más abajo, un símbolo de menos (un guión largo) para representar números negativos, en lugar de un guión corto. Esto es conforme a la notación matemática estándar. En realidad no existe ninguna diferencia entre ambos, puesto que $-N = 0 - N$. (*N. del a.*).

modificará el resultado de la taza de té. Por lo tanto, intercambiar √2 y -√2 constituirá una simetría de nuestro sistema numérico.

En este intercambio, los números racionales no experimentan cambio.[44] Por tanto, el número de la forma

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

irá al número de la forma

$$\frac{m}{n} - \frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

Dicho de otro modo, sencillamente cambiamos en cada número el símbolo que precede a √2 y dejamos lo demás igual.[45]

Como puede ver, nuestro sistema numérico es como una mariposa: los números

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

son como las escamas de sus alas, y la simetría de estos números al intercambiar √2 y -√2 es como la simetría de la mariposa con sus alas.

De un modo más general, podemos pensar en otras ecuaciones para la variable x, en lugar de $x^2 = 2$. Por ejemplo, la ecuación cúbica $x^3 - x + 1 = 0$. Si las soluciones de una ecuación como esta no son números racionales (como es el caso de las ecuaciones arriba mencionadas) entonces podemos unirlas a los números racionales. También podemos unir, a los números racionales, las soluciones de varias de estas ecuaciones a la vez. De esta manera obtenemos

muchos sistemas numéricos diferentes, o, como los matemáticos los denominan, *cuerpos numéricos*. La palabra «cuerpo» hace referencia a que este sistema numérico es cerrado con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

Al igual que el cuerpo numérico obtenido al añadir √2, los cuerpos numéricos poseen, en general, simetrías compatibles con estas operaciones. Las simetrías de un cuerpo numérico determinado se pueden aplicar una tras otra (compuestas entre sí) igual que las simetrías de un objeto geométrico. No es sorprendente, por tanto, que estas simetrías formen un grupo. A este grupo se le denomina grupo de Galois del cuerpo numérico,[46] en honor al matemático francés Évariste Galois.



La de Galois es una de las historias más románticas y fascinantes acerca de matemáticos jamás ocurridas. Niño prodigio, Galois realizó descubrimientos impresionantes ya desde muy joven. Y a los veinte años murió en un duelo.

Hay opiniones divergentes acerca de cuál fue la causa del duelo, que tuvo lugar el 31 de mayo de 1832: hay quien asegura que hubo una mujer de por medio y hay quien dice que Galois no era nada conciliador a la hora de expresar sus ideas políticas, y que habría conseguido hacer enfadar a mucha gente a lo largo de su breve vida.

Fue literalmente en la víspera de su muerte cuando, escribiendo frenéticamente a medianoche, a la luz de las velas, completó su manuscrito, en el que esbozaba sus ideas acerca de las simetrías numéricas. Fue, básicamente, su carta de amor a la humanidad, en la que compartía con nosotros los fascinantes descubrimientos que había realizado. En efecto, los grupos de simetrías que Galois descubrió, y que ahora llevan su nombre, son las maravillas de nuestro mundo, como las pirámides de Egipto o los Jardines Colgantes de Babilonia. La diferencia es que no tenemos que viajar a otro continente, o hacia atrás en el tiempo, para hallarlos.

Galois, para ser sinceros, estaba muy adelantado a su época. Sus ideas eran tan radicales que la mayor parte de sus contemporáneos, al principio, no pudieron comprenderlas. La Academia Francesa de las Ciencias rechazó por dos veces sus artículos, y su obra tardó casi cincuenta años en ser publicada y apreciada por otros matemáticos. Sin embargo, hoy en día se le considera uno de los pilares de las matemáticas modernas.

Lo que Galois hizo fue llevar la idea de simetría, que comprendemos de manera intuitiva en la geometría, al escenario central de la teoría de números. Es más: demostró el impresionante poder de las simetrías.

Antes de Galois, los matemáticos se centraban en intentar descubrir fórmulas explícitas para las soluciones de ecuaciones como

$$x^2 = 2yx^3 - x + 1 = 0,$$

las llamadas ecuaciones polinómicas. Lamentablemente, esto es lo que se nos sigue enseñando en el colegio, pese a que han transcurrido dos siglos desde la

muerte de Galois. Por ejemplo, se nos pide que memoricemos una fórmula para las soluciones de una ecuación cuadrática general (es decir, de segundo grado)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en función de sus coeficientes *a*, *b* y *c*. No escribiré esa fórmula aquí para no provocar recuerdos desagradables. Lo único que debemos recordar es que exige emplear raíces cuadradas.

De igual manera, hay una fórmula similar, aunque más complicada, para la ecuación cúbica (de tercer grado) general

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

en función de sus coeficientes *a*, *b*, *c*, *d*, que implica raíces cúbicas.

La tarea de resolver una ecuación polinómica en términos de radicales (es decir, raíces cuadradas, cúbicas, etcétera) se va complicando a medida que sube el grado de la ecuación.

El matemático persa Al-Khwarizmi, en el siglo IX, conocía ya la fórmula general para las soluciones de las ecuaciones de segundo grado: la palabra «álgebra» procede de «al-yabr», palabra que aparece en el título de su libro. Las fórmulas para las soluciones de ecuaciones cúbicas y de cuarto grado se descubrieron en la primera mitad del siglo XVI. Como es lógico, el siguiente objetivo era la ecuación de quinto grado. Con anterioridad a Galois, muchos matemáticos habían buscado desesperadamente la fórmula para sus soluciones durante casi trescientos años, pero en vano. Pero Galois se dio cuenta de que habían estado buscando en el lugar erróneo. Lo que deberían haber hecho, dijo, era centrarse en el grupo de simetrías del cuerpo numérico obtenido al unir las soluciones de esta ecuación a los números racionales: lo que hoy en día llamamos el grupo de Galois.

Cómo describir el grupo de Galois resulta ser mucho más asequible que escribir una fórmula explícita para las soluciones. Se pueden decir cosas profundas acerca de este grupo incluso sin saber cuáles son las soluciones. Y de esto se puede inferir, incluso, importante información sobre estas soluciones. En realidad, Galois pudo demostrar que una fórmula para soluciones en términos de radicales (es decir, raíces cuadradas, cúbicas, etcétera) existe si y sólo si el correspondiente grupo de Galois tiene una estructura especialmente sencilla: es lo que hoy en día los matemáticos llaman un grupo *resoluble*. Para ecuaciones cuadráticas, cúbicas y de grado 4, los grupos de Galois son siempre resolubles. Es por eso por lo que las soluciones a ese tipo de ecuaciones se pueden escribir en términos de radicales. Pero Galois demostró que el grupo de simetrías de una ecuación típica de grado 5 (o de nivel superior) no es resoluble. Lo que implica que no hay fórmula para soluciones de esas ecuaciones en términos de radicales.[47]

No entraré en los detalles de su demostración, pero déjeme mostrarle un par de ejemplos de grupos de Galois para que sepa qué aspecto tienen. Ya hemos descrito el grupo de Galois en el caso de la ecuación $x^2 = 2$. Esta ecuación tiene dos soluciones, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, que adjuntamos a los números racionales. El grupo de Galois del cuerpo numérico resultante[48] consiste, pues, en dos elementos: la identidad y el intercambio simétrico entre $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para nuestro ejemplo siguiente pensemos en la ecuación cúbica arriba descrita y supongamos que sus coeficientes son números racionales, pero sus tres soluciones son irracionales. Luego, construiremos un nuevo cuerpo numérico adjuntando esas soluciones a los números racionales. Es como añadir tres ingredientes distintos a nuestra taza de té: pongamos, por ejemplo, azúcar, unas gotas de leche y una cucharada de miel. Bajo cualquier simetría de este cuerpo numérico (la taza de té con estos ingredientes añadidos) la ecuación cúbica no cambiará porque sus coeficientes son números racionales, conservados por las simetrías. De aquí que cualquier solución de la ecuación cúbica (uno de los tres ingredientes) irá necesariamente a otra solución. Esta

observación nos permite describir el grupo de Galois de las simetrías de este cuerpo numérico en términos de permutaciones de estas tres soluciones. Lo más importante es que obtenemos esta descripción sin escribir ninguna fórmula para las soluciones.[49]

De manera similar, el grupo de Galois de simetrías del cuerpo numérico obtenido al unir todas las soluciones de una ecuación polinómica arbitraria a los números racionales puede también describirse en términos de permutaciones de estas soluciones (habrá *n* soluciones para una ecuación polinómica de grado *n* siempre que estas soluciones sean distintas y no racionales). De esta manera podemos inferir mucha información acerca de la ecuación sin expresar sus soluciones en términos de los coeficientes.[50]

La obra de Galois es un gran ejemplo del poder de una comprensión matemática. Galois no resolvió el problema de hallar una fórmula para soluciones a ecuaciones polinómicas en el sentido en que se entendía. ¡Había *puenteado* el problema! Lo había reformulado, le había dado la vuelta y lo había mirado bajo una luz completamente diferente. Y su brillante percepción cambió para siempre la manera en que la gente piensa en los números y las ecuaciones.

Y entonces, ciento cincuenta años después, Langlands llevó esas ideas mucho más lejos. En 1967 llegó con revolucionarias ideas que enlazaban la teoría de grupos de Galois con otra área de las matemáticas llamada «análisis armónico». Estas dos áreas, que parecían estar a años luz de distancia, resultó que se relacionaban estrechamente. Langlands, que por entonces acababa de entrar en la treintena, resumió sus ideas en una carta al eminente matemático André Weil. Las copias circularon ampliamente entre los matemáticos de la época.[51] La nota escrita en la introducción es famosa por su eufemismo:[52]

> *Profesor Weil: en respuesta a su invitación a visitarle y charlar, he escrito la carta adjunta. Tras escribirla me he dado cuenta de que apenas hay en ella alguna frase de la que esté seguro. Si desea leerla a modo de pura especulación, estaré encantado; si no... seguro que tiene usted una*

papelera a mano.

Lo que seguía era el inicio de una teoría revolucionaria que cambiaría para siempre la manera en que pensábamos en las matemáticas. Así nació el Programa Langlands.

Varias generaciones de matemáticos han dedicado sus vidas a resolver los problemas avanzados por Langlands. ¿Qué es lo que les inspiró a ello? La respuesta está en el capítulo siguiente.

Capítulo 8
Números mágicos

Cuando hablamos por primera vez de simetrías en el capítulo 2 vimos que las representaciones de un grupo llamado SU(3) gobiernan el comportamiento de las partículas elementales. El Programa Langlands también se centra en las representaciones de grupos, pero esta vez se trata del grupo Galois de simetrías de un cuerpo numérico del tipo que vimos en el capítulo precedente.

Resulta que estas representaciones son el «código fuente» de un cuerpo numérico, y transportan toda la información necesaria acerca de los números.

La maravillosa idea de Langlands fue que podíamos extraer toda esa información de objetos de una naturaleza completamente diferente: las llamadas funciones automorfas, que proceden de otro campo de las matemáticas llamado análisis armónico. Las raíces del análisis armónico se hunden en el estudio de los armónicos, que son las ondas básicas de sonido cuyas frecuencias son múltiplos unas de otras. La idea es que una onda sonora es, en general, una superposición de armónicos, de la manera en que una sinfonía es la superposición de los armónicos correspondientes a las notas tocadas por varios instrumentos. Matemáticamente, esto significa expresar una función dada como una superposición de las funciones que describen armónicos, como las conocidas funciones trigonométricas de seno y coseno. Las funciones automorfas son versiones más sofisticadas de estos conocidos armónicos. Hay potentes medios de análisis para efectuar cálculos con estas funciones automorfas. Y la sorprendente idea de Langlands fue que podíamos emplear estas funciones para saber mucho acerca de cuestiones mucho más difíciles en teoría de números. De esta manera, hallamos una armonía oculta en los números.

He escrito en el prefacio que una de las principales funciones de las matemáticas es ordenar la información, o, en palabras del propio Langlands, «crear orden a partir del aparente caos».[53] La idea de Langlands es tan

poderosa precisamente porque ayuda a organizar datos aparentemente caóticos de teoría de números en patrones regulares llenos de simetría y armonía.

Si pensamos en los diferentes campos de las matemáticas como continentes, la teoría de números sería Norteamérica y el análisis armónico, Europa. A lo largo de los años, hemos ido tardando menos tiempo cada vez en viajar de un continente a otro. Se solía tardar varios días en barco; ahora son sólo unas horas en avión. Pero imagine que se inventara una nueva tecnología que permitiera transportarse instantáneamente desde cualquier lugar de Norteamérica a algún lugar de Europa. Eso sería el equivalente a las conexiones descubiertas por Langlands.

Voy ahora a describir una de esas impresionantes conexiones, estrechamente relacionada con el último teorema de Fermat, del que hablamos en el capítulo 6.

El último teorema de Fermat es engañosamente sencillo a la hora de presentarse. Dice que no hay números enteros x, y y z para resolver la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

si n es mayor que 2.

Como ya he escrito, el matemático francés Pierre Fermat ya supuso esto hace más de trescientos cincuenta años, en 1637. Escribió al respecto en el margen de un libro que estaba leyendo, asegurando que había encontrado una prueba «*realmente maravillosa*» de esta afirmación, «*pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla*». Digamos que podría ser una prueba estilo Twitter del siglo XVII: «He hallado una maravillosa prueba para este problema, pero lamentablemente no la puedo poner aquí porque excede de los ciento cuarenta carac»... vaya, me quedé sin espacio.

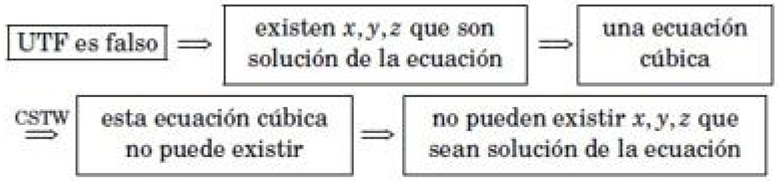
Existen pocas dudas acerca de que Fermat estaba equivocado. Se tardó más de

trescientos cincuenta años en hallar una auténtica demostración, y es increíblemente complicada. Hay dos pasos principales: en primer lugar, en 1996 Ken Ribet demostró que el último teorema de Fermat se podía obtener a partir de la llamada conjetura Shimura-Taniyama-Weil.

Quizá debería explicar aquí que una conjetura matemática es una afirmación que uno espera que sea cierta, pero para la que aún no existe una prueba. Una vez se encuentre una prueba, la conjetura pasa a ser un teorema.[54]

Lo que Ken Ribet demostró fue que si existían números naturales *x*, *y* y *z* que resolvieran la ecuación de Fermat, empleando esos mismos números uno podía construir cierta ecuación cúbica, que cumple una propiedad que no sería posible debido a la conjetura Shimura-Taniyama-Weil (explicaré qué son esta ecuación y esta propiedad). Por tanto, si sabemos que la conjetura Shimura-Taniyama-Weil es cierta, esta ecuación no puede existir. Pero, por lo mismo, los números *x*, *y* y *z* para resolver la ecuación de Fermat tampoco pueden existir.[55]

Detengámonos un minuto y repasemos la lógica de esta argumentación una vez más. A fin de demostrar el último teorema de Fermat, supongamos que es falso, es decir: que sí existen números *x*, *y* y *z* tales que satisfagan la ecuación de Fermat. Después asociamos estos números a una ecuación cúbica, que resulta poseer una propiedad indeseable. La conjetura Shimura-Taniyama-Weil nos dice que una ecuación así *no puede existir*. Pero, entonces, estos números *x*, *y* y *z* tampoco pueden existir. Así pues, no puede haber solución a la ecuación de Fermat. Por tanto, ¡el último teorema de Fermat es cierto! Esquemáticamente, el diagrama de flujo de esta argumentación es como sigue (abreviaremos el último teorema de Fermat como UTF y la conjetura Shimura-Taniyama-Weil como CSTW):



A este tipo de argumentación se le llama *reducción al absurdo*. Comenzamos por afirmar lo opuesto de lo que intentamos demostrar (en este caso, la afirmación es que existen números naturales *x*, *y* y *z* que resuelven la ecuación de Fermat, que es lo opuesto a lo que queremos probar). Si, mediante una cadena de implicaciones, llegamos a una afirmación que es demostrablemente falsa (en este caso, la existencia de una ecuación cúbica prohibida por la conjetura Shimura-Taniyama-Weil) podemos concluir que la afirmación por la que comenzamos es falsa. De aquí que la afirmación que queríamos demostrar (el último teorema de Fermat) es cierta.

Lo que queda, entonces, para establecer el último teorema de Fermat es demostrar que la conjetura Shimura-Taniyama-Weil es cierta. Una vez se comprendió esto (en 1986, tras la obra de Ribet) la búsqueda se desplazó hacia pruebas de la conjetura Shimura-Taniyama-Weil.

A lo largo de los años se habían anunciado varias demostraciones, pero los análisis subsiguientes corroboraron que esas pruebas contenían errores o vacíos. En 1993 Andrew Wiles afirmó que había demostrado la conjetura, pero meses después se comprobó que había un lapsus en su demostración. Durante un tiempo pareció que esta prueba sería recordada como una más de las «no demostraciones» anteriores, en las que se hallaban lapsus que nunca se conseguían cerrar.

Afortunadamente, Wiles fue capaz de cerrar el hueco en menos de un año, con ayuda de otro matemático, Richard Taylor. Juntos, completaron la demostración.[56] En una maravillosa película documental acerca del último teorema de Fermat, Wiles se emociona al recordar el momento, y nosotros sólo podemos imaginar lo terrible que debe haber sido la experiencia para él.

Así pues, la conjetura Shimura-Taniyama-Weil es un resultado clave a la hora de demostrar el último teorema de Fermat. También se le puede ver como un caso especial del Programa Langlands, y por tanto proporciona un ejemplo excelente de las inesperadas conexiones predichas por este.

La conjetura Shimura-Taniyama-Weil es una afirmación acerca de determinadas ecuaciones. De hecho, una gran parte de las matemáticas tiene que ver con resolver ecuaciones. Queremos saber si una ecuación dada tiene solución en un dominio determinado; si es así, ¿podemos hallar una? Si hay varias, ¿cuántas? ¿Por qué algunas ecuaciones tienen solución y otras no?

En el capítulo anterior hablamos de las ecuaciones polinómicas de una variable, como $x^2 = 2$. El último teorema de Fermat trata sobre una ecuación con tres variables:

$$x^n + y^n = z^n.$$

Y la conjetura Shimura-Taniyama-Weil trata de un tipo de ecuaciones algebraicas de dos variables, como esta:

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

La solución a este tipo de ecuaciones es un par de números x e y tales que el lado de la izquierda sea igual que el lado de la derecha.

Pero ¿qué tipo de números queremos que sean x e y? Existen varias opciones: una posibilidad es decir que x e y son números naturales o enteros. Otra posibilidad es decir números racionales. Podemos buscar soluciones en las que x e y sean números reales o incluso números complejos: hablaremos de esta opción más a fondo en el próximo capítulo.

Resulta que hay una opción más, menos obvia pero igualmente importante: considerar soluciones x e y «módulo N» para algún número natural determinado N. Es decir, buscamos números enteros x e y tales que el lado

izquierdo sea igual al lado derecho añadiendo cualquier número divisible por N. Por ejemplo, busquemos soluciones módulo $N = 5$. Hay una solución obvia: $x = 0$, $y = 0$. Y hay otras tres soluciones un poco menos obvias: $x = 0$, $y = 4$ es una solución módulo 5 porque en tal caso el lado izquierdo es 20 y el lado derecho, 0. La diferencia entre ambos lados es 20, que es divisible por 5: se trata de una solución módulo 5. Por la misma razón, $x = 1$, $y = 0$ y $x = 1$, $y = 4$ son también soluciones módulo 5.

Ya habíamos hablado de este tipo de aritmética en el capítulo 2, cuando tratamos del grupo de rotaciones de una mesa. En aquella ocasión ya vimos que la suma de ángulos se realizaba «módulo 360». Eso significa que si el resultado de la suma de dos ángulos es superior a 360, le restamos 360 para llevarlo al rango de 0 a 360. Por ejemplo: una rotación de 450 grados es como una rotación de 90 grados, porque 450 - 360 = 90.

También hallamos esta aritmética cuando usamos un reloj. Si empezamos a trabajar a las 10 de la mañana y trabajamos 8 horas, ¿cuándo acabamos? Bueno, 10 + 8 = 18, de modo que lo natural sería decir que «acabamos a las 18 en punto». Esto sería perfectamente normal en Francia, donde se habla de las horas empleando de 0 a 24 (en realidad, no tan correcto, porque un día de trabajo en Francia suele estar limitado a siete horas). Pero en España se dice «salimos a las 6 de la tarde». ¿Cómo obtenemos 6 de 18? Pues le restamos 12: 18 - 12 = 6.

De modo que usamos la misma idea con las horas que con los ángulos. En el primer caso, hacemos sumas «módulo 360»; en el segundo, hacemos sumas «módulo 12».

Podemos hacer, de la misma manera, sumas en cualquier módulo de número natural N. Pensemos en el conjunto de todos los números naturales consecutivos entre 0 y $N - 1$:

$$\{0, 1, 2..., N - 2, N - 1\}.$$

Si $N = 12$, se trata del conjunto de horas posibles. En general, el papel de 12 lo interpreta el número N, de modo que no es 12 quien nos lleva de regreso al 0, sino N.

Definimos la suma en el conjunto de estos números de la misma manera que con las horas. Dados dos números del conjunto, los sumamos, y si el resultado es mayor que N, le restamos N para obtener un número del conjunto. Esta operación convierte a este conjunto en un grupo. El elemento identidad es el número 0: al sumarlo a cualquier otro número, este no cambia. En efecto, tenemos que $n + 0 = n$. Y para cualquier número n de nuestro conjunto, su «inverso por la suma» es $N - n$, porque $n+(N - n) = N$, que es lo mismo que 0 según nuestras reglas.

Por ejemplo, tomemos $N = 3$. Tenemos el conjunto {0, 1, 2} y suma módulo 3. Tenemos, por ejemplo,

$$2 + 2 = 1 \text{ módulo } 3$$

en este sistema, porque 2 + 2 = 4, pero dado que 4 = 3 + 1, módulo 3, el 4 es igual a 1 módulo 3.

De modo que si alguien le dice «dos más dos son cuatro» para indicar un hecho cierto, ahora puede usted responder (con una sonrisa condescendiente, si quiere): «Bueno, en realidad eso no siempre es verdad».

Y si le preguntan qué quiere decir, puede responder: «Si realizas una suma módulo 3, 2 más 2 es igual a 1».

Dados dos números cualesquiera del conjunto arriba visto, también podemos multiplicarlos. El resultado puede no estar entre 0 y $N - 1$, pero habrá un número único en este rango que diferirá del resultado de la multiplicación una cantidad que sea múltiplo de N. Sin embargo, en general, el conjunto {0, 1, 2…, $N - 2$, $N - 1$} no es un grupo con respecto a la multiplicación. Tiene el elemento identidad: el número 1. Pero no todos los elementos tienen inverso para la multiplicación módulo N. Esto ocurre si, y sólo si, N es *un número*

primo, es decir, un número no divisible por ningún otro número aparte de 1 y de sí mismo.[57]

Los primeros números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13... Es tradición excluir el 1 de esta lista. Los números naturales pares, exceptuando el 2, no son primos, porque son divisibles por 2, y 9 no es primo, puesto que es divisible por 3. Hay, de hecho, infinitos números primos: no importa cuán grande es un número primo, habrá otro más grande.[58] Los primos, por ser indivisibles, son las partículas elementales del mundo de los números naturales; todos los demás, en realidad, pueden escribirse como producto de números primos. Por ejemplo, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Fijemos un número primo. Por costumbre lo llamaremos p. Luego consideremos el conjunto de números naturales consecutivos de 0 a $p - 1$, es decir:

$$\{0, 1, 2, 3, 4..., p - 2, p - 1\}$$

Y pensemos en dos operaciones con ellos: suma y multiplicación módulo p.

Como hemos visto arriba, este conjunto es un grupo con respecto a la suma módulo p. Lo que es incluso más remarcable es que si quitamos el número 0 y consideramos el conjunto de números consecutivos entre 1 y $p - 1$, es decir

$$\{1, 2..., p - 2, p - 1\},$$

obtenemos un grupo con respecto a la multiplicación módulo p. El elemento 1 es el elemento identidad de la multiplicación (hasta aquí, claro) y puedo asegurar que todo número natural entre 1 y $p - 1$ tiene un inverso para la multiplicación.[59]

Por ejemplo, si $p = 5$, tenemos que

$$2 \times 3 = 1 \text{ módulo } 5,$$

y que

$$4 \times 4 = 1 \text{ módulo } 5,$$

de modo que el inverso para la multiplicación de 2 módulo 5 es 3, y que 4 es su propio inverso para la multiplicación módulo 5. Resulta que esto es cierto en general.[60]

En nuestra vida cotidiana, estamos acostumbrados a números que son enteros o fracciones. A veces empleamos números como $\sqrt{2}$. Pero ahora hemos descubierto un sistema numérico de una naturaleza completamente diferente: el conjunto finito de números $\{0, 1, 2..., p - 1\}$ en que p es un número primo, en el que tenemos las operaciones de suma y multiplicación módulo p. Se le llama *cuerpo finito* con p elementos. Estos cuerpos finitos forman un importante archipiélago en el mundo de los números; uno que, lamentablemente, a la mayoría de nosotros no se nos dice que existe.

Pese a que estos sistemas numéricos parecen bastante diferentes de los sistemas numéricos a los que estamos acostumbrados, como los números racionales, poseen las mismas propiedades destacadas: son cerrados para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.[61] Por tanto, cualquier cosa que podamos hacer con los números racionales la podemos hacer con estos cuerpos finitos de apariencia más esotérica.

En realidad ya no son tan esotéricos, tras haberse hallado para ellos importantes aplicaciones, sobre todo en criptografía. Cuando hacemos una compra *online*, e introducimos nuestro número de tarjeta de crédito, este número se encripta usando la aritmética de módulos primos, todo dictado por ecuaciones como la que hemos visto arriba (véase la descripción del algoritmo de encriptación RSA en la nota 7 del capítulo 14).

Regresemos a la ecuación cúbica

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

que vimos antes. Busquemos soluciones para esta ecuación módulo p, para varios números primos p. Por ejemplo, ya hemos visto arriba que hay 4 soluciones módulo 5. Pero nótese que las soluciones módulo 5 no son necesariamente soluciones módulo otros números primos (por poner un par de ejemplos, $p = 7$ y $p = 11$). De modo que estas soluciones dependen del número primo p del módulo en que realizamos la operación aritmética.

La pregunta que vamos a hacer ahora es la siguiente: ¿de qué manera el número de soluciones de esta ecuación, módulo p, depende de p? Con números p pequeños, podemos contarlos de manera explícita (quizá con ayuda de un ordenador) y compilar una pequeña tabla.

Los matemáticos han sabido desde hace algún tiempo que el número de soluciones a una ecuación de este tipo módulo p es aproximadamente igual a p. Señalemos el «déficit», el número en que la cantidad real de soluciones difiere de la cantidad esperada de soluciones (es decir, p) como a_p. El número de soluciones de la ecuación arriba mencionada módulo p es $p - a_p$. Los números a_p pueden ser positivos o negativos para un p determinado.

Como ejemplo, vimos arriba que para $p = 5$ hay 4 soluciones. Dado que $4 = 5 - 1$, tenemos que $a_5 = 1$.

Podemos hallar los números a_p para números primos pequeños con un ordenador. Parecen ser aleatorios. No parece haber ninguna fórmula natural o regla que nos ayude a computarlos. Peor aún: muy pronto la computación se vuelve terriblemente complicada.

Pero ¿qué pensaría si le dijera que hay, en realidad, una regla sencilla capaz de generar todos los números a_p de una sola tacada?

En caso de que se pregunte a qué me refiero por «una regla» para generar esos números, observemos una secuencia mucho más conocida, la serie de números de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...$$

Llamados así en honor a un matemático italiano que los expuso en su libro publicado en 1202[xv] (en el contexto de un problema de apareamiento de conejos, ahí es nada) los números de Fibonacci están por todas partes en la naturaleza: desde la disposición de pétalos en las flores a los patrones de la superficie de una piña. También tienen múltiples aplicaciones, como los retrocesos de Fibonacci en los análisis técnicos de movimientos de la Bolsa.

Los números de Fibonacci se definen de la siguiente manera: los dos primeros son iguales a 1. A partir de ahí, cada número es igual a la suma de los dos números de Fibonacci anteriores. Por ejemplo,

$$2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, \text{etc.}$$

Si indicamos el n-ésimo número de Fibonacci como F_n, tenemos que $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y que

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2.$$

En principio, esta regla nos permite hallar el n-ésimo número de Fibonacci para cualquier n. Pero para poder hacer esto, primero tenemos que hallar todos los números de Fibonacci F_i para i entre 1 y n - 1.

Sin embargo, resulta que estos números también pueden generarse de la manera siguiente. Considere la serie

$$q + q(q + q^2) + q(q + q^2)^2 + q(q + q^2)^3 + q(q + q^2)^4 + ...$$

En palabras, estamos multiplicando una variable auxiliar q por la suma de

[xv] Se trata del *Liber abaci* («Libro de aritmética»). (*N. del t.*).

todas las potencias de la expresión ($q + q^2$). Si operamos los paréntesis obtenemos una serie infinita, cuyos primeros términos son

$$q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 8q^6 + 13q^7 + \ldots$$

Por ejemplo, calculemos el término con q^3. Sólo puede darse en q, $q(q + q^2)$ y $q(q + q^2)^2$. (De hecho, las demás expresiones que aparecen en la suma definida, como $q(q+q^2)^3$, contendrán tan sólo potencias de q mayores a 3.) La primera de estas no contiene q^3, y cada una de las otras dos contiene una vez q^3. Su suma arroja $2q^3$. Obtenemos de manera similar otros términos de la serie.

Si analizamos los primeros términos de la serie, veremos que para n entre 1 y 7, el coeficiente que multiplica q_n es el n-ésimo número de Fibonacci F_n. Por ejemplo, tenemos el término $13q^7$ y $F_7 = 13$. Resulta que esto se cumple para todo n. Por ello, los matemáticos llaman a esta serie infinita la *función generadora* de los números de Fibonacci.

Esta notable función se puede emplear para proporcionar una fórmula eficaz para calcular el n-ésimo número de Fibonacci sin ninguna referencia de los números de Fibonacci precedentes.[62] Pero incluso dejando de lado los aspectos computacionales podemos apreciar el valor añadido por esta función generadora: en lugar de proporcionar un procedimiento autorreferente, la función generadora contempla todos los números de Fibonacci a la vez.

Volvamos a los números a_p que cuentan las soluciones para la ecuación cúbica módulo números primos (p). Pensemos en estos números como en análogos de los números de Fibonacci (ignoremos el hecho de que los números a_p sólo tienen subíndice primo p, mientras que los de Fibonacci tienen cualquier número natural n).

Parece casi increíble que pueda haber una regla generadora de estos números. Y sin embargo, el matemático alemán Martin Eichler descubrió una en 1954.[63] Piense en la siguiente función generadora:

$$q(1 - q)^2(1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)^2(1 - q^{33})^2...$$

Puesta en palabras, es q veces el producto de los factores de la expresión $(1 - q^a)^2$ con a recorriendo la lista de números de las expresiones n y11n, en que $n = 1, 2, 3...$ Operemos los paréntesis usando las reglas estándar:

$$(1 - q)^2 = 1 - 2q + q^2, (1 - q^{11})^2 = 1 - 2q^{11} + q^{22}...$$

y luego multipliquemos todos los factores. Agrupando los términos, obtenemos una suma infinita que comienza así:

$$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7$$

$$- 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + 4q^{13} + ...$$

y hacemos omisión de las potencias de q mayores que 13 por no ser necesario conocer más coeficientes para la comprensión de esta explicación. Aunque esta serie es infinita, los coeficientes están bien definidos porque están determinados por un número finito de factores del producto. Indiquemos el coeficiente de q^m como b_m. Así tenemos que

$$b_1 = 1, b_2 = -2, b^3 = -1, b^4 = 2, b^5 = 1, \text{ etcétera.}$$

Es fácil calcularlos a mano o con un ordenador.

Una genialidad de Eichler fue que para todos los números primos p, el coeficiente b_p es igual a a_p. Dicho de otra manera,

$$a^2 = b^2, a^3 = b^3, a^5 = b^5, a^7 = b^7, \text{ etcétera.}$$

Comprobemos, por ejemplo, si esto es así para $p = 5$. En este caso, si miramos la función generadora vemos que el coeficiente para q^5 es $b^5 = 1$. Por otra parte, ya hemos visto que nuestra ecuación cúbica tiene 4 soluciones módulo $p = 5$. Por lo tanto, $a^5 = 5 - 4 = 1$, de modo que, en efecto, $a^5 = b^5$.

Comenzamos con lo que parecía un problema de una complejidad infinita: contar las soluciones para la ecuación cúbica

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

módulo p, para todos los números primos p. Y sin embargo, toda la información necesaria para este problema se encuentra resumida en una sola línea:

$$q(1 - q)^2(1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)^2(1 - q^{33})^2...$$

Esta línea es un código secreto que contiene toda la información acerca de la cantidad de soluciones para la ecuación cúbica módulo números primos.

Una analogía útil sería pensar en la ecuación cúbica como en un sofisticado organismo biológico, y en sus soluciones como en diferentes características del mismo. Sabemos que todas esas características están codificadas en su molécula ADN. De la misma manera, la complejidad de nuestra ecuación cúbica está codificada en una función generadora, que es como el ADN de la ecuación. Además, esta función viene definida por una sencilla regla.

Lo que resulta incluso más fascinante es que si q es un número cuyo valor absoluto es menos que 1, la suma infinita que hemos visto arriba tiende a un número bien definido. De modo que obtenemos una función en q, y esta función resulta tener una propiedad muy especial, similar a la periodicidad de las conocidas funciones trigonométricas, como seno y coseno.

La función seno sen(x) es periódica, con período 2π, es decir, sen($x+2\pi$) = sen(x). Pero también sen($x+4\pi$) = sen(x), y de un modo más general, sen(x + 2 πn) = sen(x) para cualquier entero n. Piense en ello de esta manera: todo

entero n genera una simetría de la recta: todo punto x de la recta se desplaza a $x + 2\pi n$. Por tanto, el grupo de todos los enteros se entiende como un grupo de simetrías de la recta. La periodicidad de la función seno significa que esta función es invariante bajo este grupo.

De la misma manera, la función generadora Eichler de la variable q escrita anteriormente resulta ser invariante bajo un determinado grupo de simetrías. Aquí deberíamos considerar q no como un número real, sino más bien un número complejo (hablaremos de esto en el siguiente capítulo). Así podríamos ver q no como un punto en una recta, como en el caso de la función seno, sino como un punto dentro de un disco unidad en el plano complejo. La propiedad de simetría es similar: en este disco hay una serie de simetrías, y nuestra función es invariante bajo este grupo.[64] A una función con este tipo de propiedad de invarianza se le llama forma modular.

Este grupo de simetrías del disco es muy rico. Para hacernos una idea de lo que es, veamos una ilustración en la que el disco está descompuesto en infinitos triángulos:[65]



La acción de las simetrías en el disco intercambia los triángulos. En realidad, para dos triángulos cualesquiera del disco existe una simetría que los intercambia. Aunque las simetrías de este disco son bastante sofisticadas, esto es análogo a cómo, cuando el grupo de enteros actúa en la recta, sus simetrías se desplazan a lo largo de los intervalos $[2\pi m, 2\pi(m + 1)]$. La función seno es invariante bajo estas simetrías, mientras que la función generadora Eichler es invariante bajo las simetrías del disco.

Como mencioné al principio del capítulo, la función seno es el ejemplo más sencillo de un armónico (onda básica) empleado en análisis armónico de la recta. De igual manera, la función Eichler, junto con otras formas modulares,

son los armónicos que aparecen en el análisis armónico del disco unidad.

La magnífica idea de Eichler fue que las cantidades aparentemente aleatorias de soluciones a una ecuación cúbica módulo números primos procedía de una sola función generadora, lo que obedece a una exquisita simetría, y revela un orden y una armonía ocultos en esos números. De igual manera, como por un encantamiento mágico, el Programa Langlands organiza información previamente inaccesible en patrones regulares, tejiendo un delicado tapiz de números, simetrías y ecuaciones.

Puede que se haya preguntado, cuando empecé a hablar de matemáticas al principio del libro, a qué me refería cuando decía que un resultado matemático podía ser «bello» o «elegante». Es esto. El hecho de que estas nociones tan abstractas estén unidas con una armonía tan refinada es completamente alucinante. Apunta a que hay algo poderoso y misterioso acechando bajo la superficie, como si alguien hubiera levantado el telón y tuviéramos destellos de una realidad que se nos había ocultado cuidadosamente. Estas son las maravillas de las matemáticas modernas, y del mundo moderno.

Uno podría también preguntarse si, además de poseer una belleza innata y de revelar un sorprendente vínculo entre áreas de las matemáticas aparentemente distantes, este resultado tiene aplicaciones prácticas. Es una pregunta justa. Por el momento, no conozco ninguna. Pero las ecuaciones cúbicas sobre cuerpos finitos de *p* elementos que hemos visto arriba (y que generan las llamadas curvas elípticas) se emplean ampliamente en criptografía.[66] De modo que no me sorprendería que algún día resultados análogos a los de Eichler hallaran aplicaciones como poderosos y ubicuos algoritmos de encriptación.

La conjetura Shimura-Taniyama-Weil es una generalización del resultado de Eichler. Dice que *para toda* ecuación cúbica como la arriba descrita (sujeta a leves condiciones) las cantidades de soluciones módulo números primos son los coeficientes de una forma modular. Más aún: hay una correspondencia uno a uno entre las ecuaciones cúbicas y cierto tipo de formas modulares.

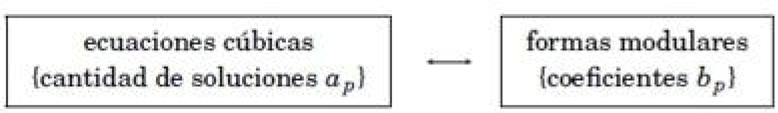
¿Qué quiere decir una correspondencia uno a uno? Supongamos que tengo cinco bolígrafos y cinco lápices. Podemos asignar un lápiz a cada bolígrafo de tal manera que cada lápiz esté emparejado tan sólo con un bolígrafo. A esto se le llama correspondencia uno a uno.

Hay muchas maneras de hacerlo. Pero supongamos que bajo nuestra correspondencia uno a uno, cada bolígrafo sea exactamente igual de largo que el lápiz que le hemos asignado. Diremos que la longitud es una «invariante» y que nuestra correspondencia conserva esta invariante. Si cada lápiz tiene una longitud diferente, la correspondencia uno a uno estará determinada de modo único por esta propiedad.

En el caso de la conjetura Shimura-Taniyama-Weil, los objetos de un lado son ecuaciones cúbicas como la arriba descrita. Estos serán nuestros bolígrafos, y para cada uno de ellos, los números a_p serán las invariantes asociadas a ellos. Es como la longitud de un bolígrafo, sólo que ahora no hay sólo una invariante, sino muchas de ellas, etiquetadas por números primos p.

Los objetos del otro lado de la correspondencia son formas modulares. Serán nuestros lápices, y para cada uno de ellos, los coeficientes b_p serán las invariantes asociadas (como la longitud de los lápices).

La conjetura Shimura-Taniyama-Weil dice que hay una correspondencia uno a uno entre estos objetos, conservando estas invariantes:



Es decir: para toda ecuación cúbica existe una forma modular tal que $a_p = b_p$ para todos los números primos p, y viceversa.[67]

Ahora ya puedo explicar el vínculo entre la conjetura Shimura-Taniyama-Weil y el último teorema de Fermat: a partir de una solución de la ecuación de Fermat podemos construir una ecuación cúbica.[68] Sin embargo, Ken Ribet demostró

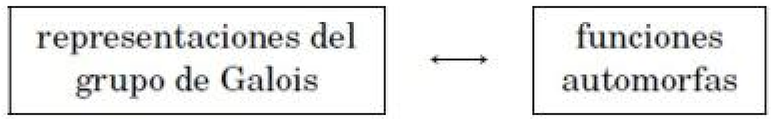
que la cantidad de soluciones de estas ecuaciones módulo números primos no pueden ser los coeficientes de una forma modular cuya existencia esté estipulada por la conjetura Shimura-Taniyama-Weil. Una vez se demuestra la conjetura, la conclusión es que esa ecuación cúbica no puede existir. Por tanto, no hay soluciones a la ecuación de Fermat.

La conjetura Shimura-Taniyama-Weil es un resultado fascinante porque las cantidades a_p proceden del estudio de soluciones de una ecuación módulo números primos (proceden del mundo de la teoría de números) y los números b_p son los coeficientes de una forma modular, procedente del mundo del análisis armónico. Estos dos mundos parecen encontrarse a años luz de distancia y, sin embargo, ¡resulta que describen la misma cosa!

La conjetura Shimura-Taniyama-Weil puede reformularse como un caso especial del Programa Langlands. Para hacerlo, sustituimos las ecuaciones cúbicas de la conjetura Shimura-Taniyama-Weil por cierta representación bidimensional del grupo de Galois. Esta representación se obtiene de modo natural de la ecuación cúbica, y las cantidades a_p se pueden unir directamente a esta representación (en lugar de a la ecuación cúbica). Por tanto, la conjetura se puede expresar como la relación entre representaciones bidimensionales del grupo de Galois y formas modulares.

(Recordaré del capítulo 2 que la representación bidimensional de un grupo es una regla que asigna una simetría de un espacio bidimensional [es decir, un plano] a cada elemento de este grupo. En el capítulo 2, por ejemplo, hablamos de una representación bidimensional del grupo circular).

De manera incluso más general, las conjeturas del Programa Langlands relacionan, de maneras inesperadas y profundas, representaciones n-dimensionales del grupo de Galois (que generalizan las representaciones bidimensionales correspondientes a las ecuaciones cúbicas de la conjetura Shimura-Taniyama-Weil) con las llamadas funciones automorfas (que generalizan las formas modulares en la conjetura Shimura-Taniyama-Weil):



Aunque hay pocas dudas sobre si estas conjeturas son ciertas, la mayoría siguen sin haberse demostrado a día de hoy, pese a los enormes esfuerzos de varias generaciones de matemáticos en los últimos cuarenta y cinco años.

Puede que se esté preguntando: ¿cómo se puede llegar a una conjetura así, en primer lugar?

Se trata de una pregunta acerca de la propia naturaleza de la inspiración matemática. La capacidad para ver patrones y conexiones que nadie ha visto antes no es algo fácil de conseguir. Suele ser el producto de meses, cuando no años, de duro trabajo. Poco a poco va surgiendo una corazonada para un nuevo fenómeno o teoría, y al principio ni uno mismo acaba de creérselo. Luego uno se pregunta: ¿y si esto es verdad? E intenta poner a prueba la idea mediante cálculos simples. A veces se trata de cálculos difíciles, y hay que navegar a través de montañas de fórmulas. La probabilidad de equivocarse es muy alta y, si al principio no funciona, intentas rehacerlo una y otra vez.

Muy a menudo, al cabo del día (o del mes, o del año) te das cuenta de que tu idea inicial era errónea, y has de intentar alguna otra cosa. Esos son momentos de frustración y desespero. Sientes que has desperdiciado un montón de tiempo, sin nada que mostrar a cambio. Es difícil de digerir. Pero uno nunca puede rendirse. Regresas al escritorio, analizas más datos, aprendes de tus errores previos e intentas tener una idea mejor. Y de vez en cuando, de repente, la idea empieza a funcionar. Es como si hubiera pasado un día en el agua sin conseguir surfear y finalmente coges una ola: intentas subirte a ella y correrla durante el mayor tiempo posible. En momentos como este, tienes que dejar que tu imaginación vuele libre para que la ola te transporte tanto como sea posible. Incluso si la idea, al principio, suena a locura absoluta.

La afirmación de la conjetura Shimura-Taniyama-Weil, al principio, debió

sonarles absurda a sus creadores. ¿Cómo no iba a ser así? Sí, la conjetura hundía sus raíces en resultados previos, como los de Eichler arriba mencionados (que serían generalizados, subsiguientemente, por Shimura), según los cuales para *algunas* ecuaciones cúbicas, las cantidades de soluciones módulo *p* se registraban en coeficientes de una forma modular. Pero la idea de que esto fuera cierto para *todas* las ecuaciones cúbicas tiene que haber sonado completamente descabellada en su momento. Era un acto de fe, un salto conceptual. El primero que lo dio fue el matemático japonés Yutaka Taniyama, en forma de una pregunta que realizó en el simposio internacional sobre teoría algebraica de números, en Tokio, en 1955.

Siempre me he preguntado cuánto le costó llegar a creer que no era una locura, sino algo real. ¿Y reunir el valor para decirlo públicamente?

Nunca lo sabremos. Lamentablemente, poco después de su gran descubrimiento, en noviembre de 1958, Taniyama se suicidó. Sólo tenía treinta y un años. Para añadir más tragedia, poco después, la mujer con la que tenía planeado casarse se quitó también la vida. Dejó la siguiente nota:[69]

> *Nos prometimos mutuamente que, no importaba dónde fuéramos, nunca nos separaríamos. Ahora que él se ha ido, he de irme yo también, para reunirme con él.*

Sería otro matemático japonés, el amigo y colega de Taniyama, Goro Shimura, quien precisaría la conjetura. Shimura ha trabajado casi toda su vida en la Universidad de Princeton, donde es actualmente profesor emérito. Ha aportado grandes contribuciones a las matemáticas, muchas de ellas pertenecientes al Programa Langlands, y varios de los conceptos fundamentales en esta área llevan su apellido (como las «relaciones de congruencia Eichler-Shimura» y las «variedades de Shimura»).

En su reflexivo ensayo acerca de Taniyama, Shimura hizo este llamativo comentario:[70]

> *Aunque no era, en absoluto, un hombre chapucero, tenía la habilidad*

> *especial de cometer muchos errores, la mayoría en la dirección acertada. Le envidio por esto, y he intentado en vano imitarlo, pero me parece dificilísimo cometer los errores correctos.*

En palabras de Shimura, Taniyama «no fue muy cuidadoso cuando expuso su problema» en el simposio de Tokio en septiembre de 1955.[71] Había que realizar algunas correcciones. Y aun así, se trataba de una inspiración revolucionaria, que llevó a uno de los logros en matemáticas más importantes del siglo XX.

La tercera persona cuyo nombre va unido a la conjetura es André Weil, a quien he mencionado antes. Se trata de uno de los gigantes de las matemáticas del siglo XX. Famoso por su brillantez y por su temperamento, nació en Francia y fue a vivir a Estados Unidos durante la segunda guerra mundial. Tras ocupar puestos académicos en varias universidades, se estableció en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton en 1958, y se quedó allí hasta su muerte en 1998, a los noventa y dos años de edad.



André Weil en 1981. Fotografía de Herman Landshoff. Fuente: Centro de Archivos Shelby White y Leon Levy, Instituto de Estudios Avanzados, Princeton.

Weil es especialmente relevante para el Programa Langlands, y no sólo porque la famosa carta en que Robert Langlands formulara por primera vez sus ideas fuese dirigida a él, ni por la conjetura Taniyama-Shimura-Weil. El Programa Langlands se aprecia mejor si se le mira a través del prisma de la «imagen general» de las matemáticas que André Weil esbozó en una carta a su hermana. Hablaremos de ello en el próximo capítulo. Será nuestro trampolín para traer el Programa Langlands al reino de la geometría.

Capítulo 9
La piedra Rosetta

En 1940, durante la guerra, André Weil estuvo preso en Francia por negarse a servir en el ejército. Como explicaba el obituario que publicó *The Economist*,[72]

[Weil] estaba conmocionado... por el daño que la primera guerra mundial había hecho a los matemáticos franceses, cuando «una errónea noción de igualdad frente al sacrificio» llevó a la masacre de la joven élite científica del país. En vista de ello, creía tener el deber, no sólo hacia sí mismo, sino hacia la civilización, de consagrar su vida a las matemáticas. En efecto, aseguraba, sería un pecado que cualquier cosa le apartara de ese objetivo. Cuando los demás objetaban con la frase «pero si todo el mundo fuese a comportarse como usted...» respondía que esa probabilidad le parecía tan poco plausible que no se sentía obligado siquiera a tenerla en cuenta.

Mientras se encontraba en prisión, Weil escribió una carta a su hermana Simone Weil, una famosa filósofa y humanista. Esta carta es un documento notable: en ella, intenta explicar en términos elementales (accesibles incluso para un filósofo... ¡es broma!) el panorama de las matemáticas como él lo veía. Al hacerlo, estableció el gran ejemplo que debían seguir todos los matemáticos. A veces digo en broma que quizá deberíamos encarcelar a algunos de los mejores matemáticos para obligarles a expresar sus ideas en términos accesibles, como hizo Weil.

Weil escribe, en la carta, acerca del papel de la analogía en las matemáticas, y pone el ejemplo (la analogía) que más le interesaba: entre teoría de números y geometría.

Esta analogía demostró ser extremadamente importante en el desarrollo del Programa Langlands. Como dijimos antes, las raíces del Programa Langlands se hunden en la teoría de números. Langlands conjeturaba que las preguntas más difíciles de teoría de números, como la cantidad de soluciones de ecuaciones en módulo números primos, se podían resolver mediante métodos

de análisis armónico, más específicamente, el estudio de funciones automorfas. Es fascinante: en primer lugar, nos proporciona una nueva manera de resolver lo que previamente parecían problemas irresolubles. En segundo lugar, señala profundas y fundamentales conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas. Así que, como es lógico, queremos saber qué ocurre realmente aquí: ¿por qué existen estas conexiones ocultas? Pero todavía no lo sabemos del todo. Se tardó mucho en resolver la conjetura Taniyama-Shimura-Weil, y tan sólo es un caso especial de las conjeturas generales Langlands. Hay cientos, miles de afirmaciones similares que aún no se han demostrado.

Así pues, ¿cómo deberíamos tratar estas difíciles conjeturas? Una manera es seguir trabajando duro e intentar tener nuevas ideas e inspiraciones. Es lo que se ha venido haciendo, y se han alcanzado importantes progresos. Otra posibilidad es intentar expandir el alcance del Programa Langlands. Dado que proporciona indicios de que existen estructuras fundamentales en teoría de números y análisis de armónicos, y de conexiones entre ambos, lo lógico es pensar que conexiones y estructuras similares existan entre otros campos de las matemáticas.

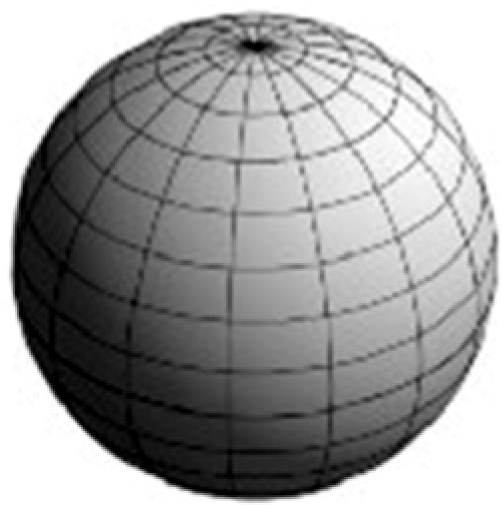
En efecto, resulta que es así. De un modo gradual, se fue llegando a la conclusión de que los mismos misteriosos patrones se podían observar en otras áreas de las matemáticas, como la geometría e incluso en la física cuántica. Cuando aprendemos algo de esos patrones en esa área, obtenemos intuiciones acerca de su significado en otras áreas. Ya he escrito anteriormente que el Programa Langlands constituye una Teoría de la Gran Unificación de las matemáticas. Y creo que posee la clave para comprender de qué tratan realmente las matemáticas, más allá de las conjeturas Langlands originales.

El Programa Langlands es, hoy en día, un tema amplio. Hay una gran comunidad de personas trabajando en él desde diferentes campos: teoría de números, análisis de armónicos, geometría, teoría de representación, física matemática... Aunque trabajan con objetos muy diferentes, todos observan

fenómenos similares. Y estos fenómenos nos proporcionan pistas para comprender cómo estos dominios tan diversos están interconectados, como partes de un gigantesco rompecabezas.

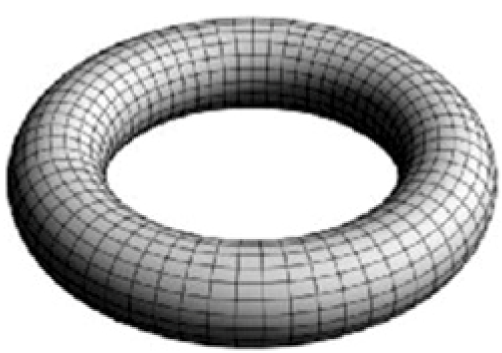
Mi puerta de entrada al Programa Langlands fue mi trabajo en álgebras de Kac-Moody, que describiré en detalle en los próximos capítulos. Pero cuanto más aprendía acerca del Programa Langlands, más me entusiasmaba por lo ubicuo que es en las matemáticas.

Piense en las diferentes áreas de las matemáticas modernas como en lenguas. Tenemos frases de todos esos idiomas que, creemos, significan lo mismo. Las ponemos unas junto a las otras, y poco a poco comenzamos a crear un diccionario que nos permite traducir entre diferentes áreas de las matemáticas. André Weil nos proporcionó un marco de trabajo adecuado para comprender las conexiones entre la teoría de números y la geometría, una especie de «piedra Rosetta» de las matemáticas modernas.



Por una parte, tenemos objetos de teoría de números: números racionales y otros cuerpos numéricos que ya describimos en el capítulo anterior, como el que se obtiene al adjuntar $\sqrt{2}$, así como sus grupos de Galois.

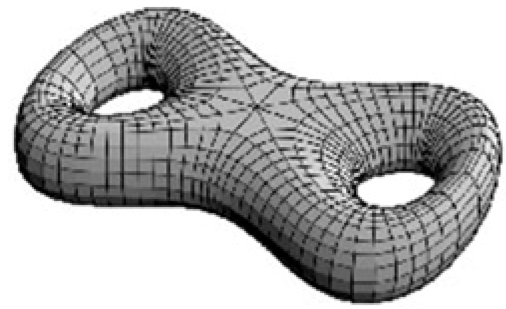
Por el otro lado tenemos las llamadas superficies de Riemann. El ejemplo más sencillo es la esfera.[73]



El siguiente ejemplo es el toro, la superficie con forma de donut. Quiero subrayar aquí que lo que estamos considerando es la *superficie* del donut, no su interior.

El ejemplo que le sigue es la superficie de un pastel danés, como el de la siguiente ilustración (también puede pensar en él como la superficie de un *pretzel*):

El toro tiene un «agujero»; el pastel danés tiene dos «agujeros». Hay también superficies con n agujeros para $n = 3, 4, 5$... Los matemáticos denominan *género* al número de agujeros de la superficie de Riemann.[xvi] Esta se llama así por el matemático alemán Bernhard Riemann, quien vivió en el siglo XIX. Su obra abrió caminos en varias direcciones importantes en las matemáticas. La teoría de los espacios curvos de Riemann, a la que ahora llamamos geometría de Riemann, es la piedra angular de la teoría de la relatividad general de Einstein. Las ecuaciones de Einstein describen la fuerza de la gravedad en términos del llamado tensor de Riemann, expresando así la curvatura del espacio-tiempo.



A primera vista, la teoría de números no tiene nada en común con las superficies de Riemann. Sin embargo, resulta que hay muchas analogías entre ellas. La clave es que existe otra clase de objetos entre ambas.

Para ver esto, tenemos que darnos cuenta de que se puede describir una superficie de Riemann como una ecuación algebraica. Por ejemplo, pensemos otra vez en una ecuación cúbica como

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

Como vimos antes, cuando hablamos de las soluciones de dicha ecuación es importante especificar a qué sistema numérico pertenecen. Hay muchas opciones, y las diferentes opciones dan lugar a diferentes teorías matemáticas. En el capítulo previo hablamos de soluciones en módulos primos, y es una teoría. Pero también podemos buscar soluciones en *números complejos*. Es otra teoría, una que da como resultado superficies de Riemann.

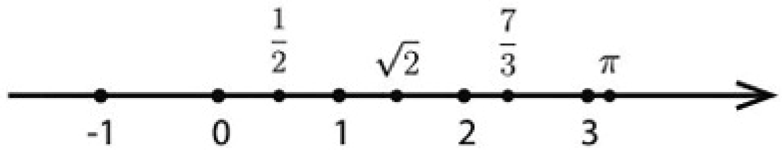
[xvi] Mi editor me dice que los *pretzels* del bar alemán que hay cerca de su casa son de género 3 (y deliciosos). (*N. del a.*).

La gente suele adscribir cualidades casi místicas a los números complejos, como si se tratara de algún tipo de objetos increíblemente complicados. Lo cierto es que no son más complicados que los números de los que hablamos en el capítulo anterior, cuando intentábamos dar sentido a la raíz cuadrada de 2. Deje que me explique. En el capítulo anterior, adjuntamos a los números racionales las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 2$, que indicamos como $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Ahora, en lugar de fijarnos en la ecuación $x^2 = 2$, fijémonos en la ecuación $x^2 = -1$. ¿Parece mucho más complicada que la previa? No. Carece de solución en números racionales, pero eso no nos da miedo. Adjuntemos las dos soluciones de esta ecuación a los números racionales. Indiquémoslas como $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$. Ambas resuelven la ecuación $x^2 = -1$, es decir, que

$$(\sqrt{-1})^2 = -1, \quad (-\sqrt{-1})^2 = -1$$

Apenas hay una diferencia con el caso anterior. El número $\sqrt{2}$ no es racional, pero es un número *real*, de modo que si lo adjuntamos a los números racionales no abandonamos el reino de los números reales.

Podemos pensar geométricamente en los números reales de la siguiente manera: dibuje una recta y marque dos puntos en ella, que representarán los números 0 y 1. Después, marque un punto a la derecha del 1, a la misma distancia que el 1 está del 0. Este punto representará el número 2. Representaremos los demás enteros de la misma manera. Ahora marcaremos los números racionales subdividiendo los intervalos entre los puntos que representan los enteros. Por ejemplo, el número ½ está exactamente a media distancia entre el 1 y el 2; el número $^7/_3$, se encuentra a un tercio de la distancia entre el 2 y el 3, etcétera. De modo intuitivo, los números reales se corresponden, uno a uno, con todos los puntos de esta recta.[74]



Recuerde que nos encontramos con √2 como la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos de longitud 1. De modo que marcamos √2 en la recta de números reales hallando un punto a la derecha de 0 cuya distancia a 0 sea igual a la longitud de esta hipotenusa. De igual modo, podemos marcar[75] en esta recta el número π, que es la circunferencia de un círculo de diámetro 1.

Por otra parte, la ecuación $x^2 = -1$ carece de soluciones entre los números racionales, y tampoco las posee entre los números reales. En efecto, el cuadrado de cualquier número real ha de ser positivo o 0, de modo que no puede ser igual a -1. Así que, a diferencia de √2 y -√2, los números √-1 y -√-1 no son números reales. Pero ¿qué más da? Seguimos el mismo procedimiento y los introducimos de la misma manera en que introdujimos los números √-2 y -√-2. Y empleamos las mismas reglas para la aritmética con estos nuevos números.

Recordemos cómo lo hicimos anteriormente: nos dimos cuenta de que la ecuación $x^2 = 2$ no tenía soluciones entre los números racionales. Así que creamos dos soluciones para esta ecuación, las indicamos como √-2 y -√-2 y las adjuntamos a los números racionales, creando así un nuevo sistema numérico, que llamamos después cuerpo numérico. De igual modo, ahora tomamos la ecuación $x^2 = -1$ y vemos que tampoco tiene soluciones entre los números racionales. De modo que *creamos* dos soluciones para esta ecuación, los indicamos como √-1 y -√-1 y los adjuntamos a los números racionales. ¡Exactamente el mismo procedimiento! ¿Por qué deberíamos creer que este nuevo sistema numérico es algo más complicado que nuestro antiguo sistema numérico, el que contenía √2?

El motivo es meramente psicológico: mientras que podemos representar √2

como la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, carecemos de una representación geométrica tan obvia para √-1. Pero podemos manipular √-1 con álgebra de un modo tan eficaz como con √2 .

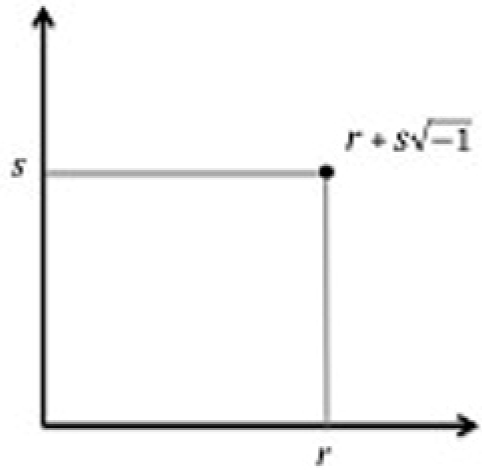
Los elementos del nuevo sistema numérico que obtenemos al adjuntar √-1 a los números racionales se llaman números complejos. Todos y cada uno de ellos pueden escribirse de la manera siguiente:

$$r + s\sqrt{-1}$$

en la que *r* y *s* son números racionales. Compare esta fórmula con la de la p. 114, que expresa los elementos generales del sistema numérico obtenido al adjuntar √2. Podemos sumar dos números cualesquiera de esta secuencia sumando por separado sus partes *r* y *s*. También podemos multiplicar dos números cualesquiera abriendo los paréntesis y empleando el hecho de que √-1 x -√-1 =-1. De manera parecida, podemos también restar y dividir estos números.

Por último, ampliamos la definición de números complejos permitiendo que *r* y *s*, en la fórmula arriba mencionada, sean números reales arbitrarios (no tan sólo los números racionales). De esta manera obtenemos los números complejos más generales. Tenga en cuenta que es costumbre indicar √-1 como *i* (de «imaginario»), pero he preferido no hacerlo para subrayar el sentido algebraico de este número: en realidad es tan sólo la raíz cuadrada de -1, ni más, ni menos. Es tan concreto como la raíz cuadrada de 2. No hay nada de misterioso en ello.

Podemos hacernos una idea de lo concretos que son estos números si los representamos geométricamente. Así como los números reales se pueden representar geométricamente como puntos en una recta, los números complejos se pueden representar como puntos en un plano. Representamos el número complejo $r + s\sqrt{-1}$ como un punto en el plano con las coordenadas *r* y *s*:[76]



Regresemos a nuestra ecuación cúbica

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

y busquemos soluciones para *x* e *y* que sean números complejos.

Un hecho notable es que el conjunto de todas las soluciones resulta ser exactamente el conjunto de puntos del toro que hemos visto antes. Dicho de otro modo, podemos asignar todo punto del toro a un (y sólo un) par de números complejos *x*, *y* que resuelvan la ecuación cúbica arriba representada, y viceversa.[77]

Si nunca antes había pensado en números complejos, puede que en este momento su cabeza esté comenzando a dolerle. Es completamente natural. Comprender perfectamente un solo número complejo es ya de por sí difícil; mucho más comprender parejas de números complejos como soluciones de una ecuación. No resulta obvio que estos pares poseen una correspondencia uno a uno con los puntos de la superficie de un donut, así que no se alarme si no consigue ver por qué. En realidad, muchos matemáticos profesionales se las verían para demostrar este sorprendente resultado no trivial.[78]

Para convencernos de que las soluciones a ecuaciones algebraicas dan lugar a

formas geométricas, miremos una situación más sencilla: soluciones entre los números reales, en lugar de entre los números complejos. Por ejemplo, pensemos en la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

y marquemos sus soluciones como puntos en el plano con coordenadas x e y. El conjunto de todas las soluciones conforma una circunferencia de radio 1, centrada en el origen. De igual modo, las soluciones de otras ecuaciones algebraicas con dos variables (con valores reales) x e y forman una curva sobre este plano.[79]

Ahora bien, los números complejos son, en cierta manera, dobles de números reales (en efecto, todo número complejo está determinado por una pareja de números reales) de modo que no es tan sorprendente que las soluciones a ecuaciones algebraicas de este tipo en variables complejas formen una superficie de Riemann (una curva es unidimensional, y una superficie de Riemann es bidimensional, en el sentido de que hablamos en el capítulo 10).

Además de entre números reales y números complejos, podemos buscar soluciones x e y, a estas ecuaciones, que tomen valores en un cuerpo finito

$$\{0, 1, 2..., p - 2, p - 1\}$$

en que p es un número primo. Esto significa que cuando sustituimos x, y en la ecuación arriba mencionada, ambos lados de la misma se convierten en enteros iguales unos a otros salvo una diferencia múltiplo de p. Esto nos proporciona un objeto que los matemáticos llaman «curva sobre un cuerpo finito». Como es evidente, en realidad no se trata de curvas. La terminología se debe a que cuando buscamos soluciones en números reales obtenemos curvas sobre el plano.[80]

Una gran idea de Weil fue que el objeto más fundamental, aquí, es una

ecuación, como la cúbica arriba expresada. Dependiendo de la elección del dominio en que busquemos las soluciones, la misma ecuación da lugar a una superficie, una curva o un montón de puntos. Pero todos estos no son sino *avatares* de algo inefable, la propia ecuación, del mismo modo en que Vishnu tiene diez avatares, o encarnaciones, en el hinduismo. En una curiosa coincidencia, en la carta a su hermana, André Weil invocaba el *Bhagavad-Gita*,[81] un texto sagrado del hinduismo, en el que se cree que apareció por primera vez la doctrina de los avatares de Vishnu.[82] Weil escribió poéticamente acerca de lo que pasa cuando la corazonada de una analogía entre dos teorías se convierte en conocimiento concreto:[83]

> *Ambas teorías desaparecen; desaparecen sus problemas y sus deliciosos reflejos mutuos, sus furtivas caricias, sus inexplicables peleas; ¡ah!, tenemos una sola teoría, cuya majestuosa belleza ya no consigue entusiasmarnos. Nada es más fértil que aquellas ilícitas relaciones; nada proporciona más placer al conoisseur… El placer procede de la ilusión y del estímulo de los sentidos; una vez la ilusión desaparece y se adquiere conocimiento, se obtiene indiferencia; existen vívidos versos en el Gita al respecto. Pero volvamos a las funciones algebraicas.*

La conexión entre superficies de Riemann y curvas sobre cuerpos finitos debería haber quedado ya clara: ambas proceden del mismo tipo de ecuaciones, pero buscamos soluciones en dominios diferentes, ya sean cuerpos finitos o números complejos. Por otra parte, «toda argumentación o resultado en teoría de los números puede traducirse, palabra por palabra», a curvas sobre cuerpos finitos, como escribía Weil en su carta.[84] La idea de Weil era, por tanto, que las curvas sobre cuerpos finitos son los objetos que median entre la teoría de números y las superficies de Riemann.

Así, encontramos un puente, o «plataforma giratoria» (como gustaba de denominarla Weil) entre teoría de números y superficies de Riemann, y se trata de la teoría de curvas algebraicas sobre cuerpos finitos. Por decirlo de otro

modo, tenemos tres columnas paralelas:

Teoría de números	*Curvas sobre cuerpos finitos*	*Superficies de Riemann*

Weil quería aprovecharlo tomando una afirmación en cualquiera de las tres columnas y traducirla en afirmaciones en las otras columnas. Escribió a su hermana:[85]

> *Mi tarea consiste en descifrar un texto trilingüe. Tan sólo tengo fragmentos dispersos de cada una de ellas; tengo algunas ideas acerca de cada uno de los tres lenguajes, pero sé también que hay enormes diferencias de significado de una columna a otra, para las que nada me ha preparado con antelación. En los varios años que llevo trabajando en ello, he hallado pequeños trozos del diccionario.*

Weil llegaría a hallar una de las más espectaculares aplicaciones de su piedra Rosetta: lo que hoy en día denominamos conjeturas de Weil. La prueba de estas conjeturas[86] estimuló en gran medida el desarrollo de las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX.

Regresemos al Programa Langlands. Las ideas originales de Langlands concernían tan sólo a la columna de la izquierda de la piedra Rosetta de Weil, es decir, la teoría de números. Langlands relacionaba representaciones de los grupos de Galois de cuerpos numéricos, que son objetos que se estudian en teoría de números, con funciones automorfas, que son objetos en análisis armónico, un área de las matemáticas muy alejada de la teoría de números (y de las demás columnas de la piedra Rosetta). Ahora podemos preguntarnos si este tipo de relaciones puede establecerse si sustituimos los grupos de Galois por otros objetos en las columnas central y derecha de la piedra Rosetta de Weil.

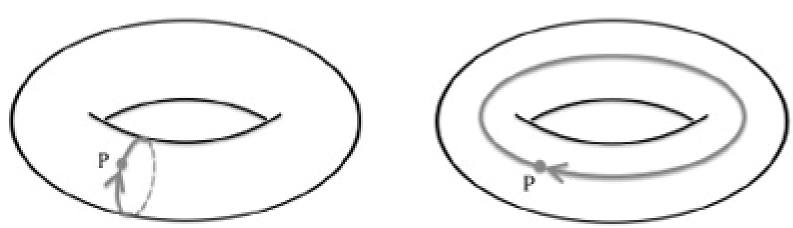
Es bastante sencillo traducir la relación de Langlands a la columna de en medio porque todos los instrumentos necesarios están ya disponibles. Habría que sustituir los grupos de Galois de cuerpos numéricos por grupos de Galois de curvas sobre cuerpos finitos. Existe también una rama de análisis de armónicos que estudia las funciones automorfas adecuadas. Ya en su obra original, Langlands relacionaba representaciones de grupos de Galois y funciones automorfas relevantes para la columna central.

Sin embargo, no queda del todo claro cómo traducir esta relación a la columna de la derecha de la piedra Rosetta. Para poder hacerlo, tenemos que hallar analogías geométricas de los grupos de Galois y de las funciones automorfas en la teoría de las superficies de Riemann. Cuando Langlands formuló sus ideas, se conocía lo primero, pero lo último era un gran misterio. No fue hasta la década de 1980 cuando se encontró la noción apropiada. Se comenzó con el trabajo pionero del brillante matemático ruso Vladimir Drinfeld. Esto permitió la traducción de la relación de Langlands a la tercera columna de la piedra Rosetta.

Veamos en primer lugar la analogía geométrica del grupo de Galois. Se trata del llamado *grupo fundamental* de una superficie de Riemann.

El grupo fundamental es uno de los conceptos más importantes del campo de la topología, que se centra en los rasgos más sobresalientes de formas geométricas (como el número de «agujeros» de una superficie de Riemann).

Pensemos, por ejemplo, en un toro. Escogemos un punto sobre él (llamémoslo *P*) y analicemos los caminos cerrados que comienzan y acaban en este punto. En la imagen se muestran dos patrones de este tipo:



De un modo similar, el grupo fundamental de cualquier superficie de Riemann consiste en caminos cerrados en ella, que comienzan y acaban en el mismo punto fijo *P*.[87]

Dados dos caminos que comienzan y acaban en el punto *P*, construimos otro del siguiente modo: nos movemos a lo largo del primer camino y luego a lo largo del segundo. De esta manera obtenemos un nuevo camino, que también comenzará y acabará en el punto *P*. Resulta que esta «suma» de caminos cerrados satisface todas las propiedades de un grupo enumeradas en el capítulo 2. Por tanto, hallamos que estos caminos forman un grupo.[88]

Puede que se haya dado cuenta de que la regla de suma de caminos en el grupo fundamental es similar a la regla de suma de trenzas en los grupos de trenzas, según las hemos definido en el capítulo 5. Esto no es casual. Como se explicaba en el capítulo 5, se puede ver a las trenzas con n hebras como caminos en el espacio de recolecciones de n puntos distintos en el plano. En realidad, el grupo de trenzas B_n es precisamente el grupo fundamental de este espacio.[89]

Resulta que los dos caminos sobre el toro descritos en el gráfico de arriba son conmutables, es decir, que al sumarlos en los dos posibles órdenes obtenemos el mismo elemento del grupo fundamental.[90] Por tanto, se obtiene el elemento más general del grupo fundamental del toro siguiendo el primer camino M veces y siguiendo luego el segundo camino N veces, donde M y N son enteros (si M es negativo, se sigue el primer camino $-M$ veces en la dirección opuesta, y lo mismo para un N negativo). Dado que estos dos caminos básicos son conmutables, el orden en que los sigamos no importa; el resultado será el mismo.

En otras superficies de Riemann, la estructura del grupo fundamental es más complicada.[91] Caminos diferentes no son necesariamente conmutables. Esto es similar a las trenzas con más de dos hebras no conmutables, como vimos en el capítulo 5.

Durante algún tiempo se ha sabido que hay una profunda analogía entre los grupos de Galois y los grupos fundamentales.[92] Esto proporciona la respuesta

a nuestra primera pregunta: ¿cuál es el análogo del grupo de Galois en la columna de la derecha de la piedra Rosetta de Weil? Es el grupo fundamental de la superficie de Riemann.

La siguiente cuestión es hallar análogos adecuados de las funciones automorfas, los objetos que aparecen en el otro lado de la relación de Langlands. Y aquí tenemos que efectuar un salto espectacular, cuántico. Las viejas y conocidas funciones resultan inadecuadas. Hemos de sustituirlas por objetos más sofisticados de las matemáticas modernas, llamados *haces*, que describiremos en el capítulo 14.

Esto lo propuso Vladimir Drinfeld en la década de 1980. Aportó una nueva formulación del Programa Langlands que se aplica a las columnas central y derecha, que conciernen a curvas sobre cuerpos finitos y superficies de Riemann, respectivamente. A esta formulación se le conoce como el Programa Langlands geométrico. Drinfeld, para ser exactos, halló los análogos de las funciones automorfas adecuados para la columna de la derecha de la piedra Rosetta de Weil.

Me encontré con Drinfeld en la Universidad de Harvard en primavera de 1990. No sólo me entusiasmó con el Programa Langlands, sino que además me contó que tenía un papel que desempeñar en su desarrollo. Esto se debía a que Drinfeld veía una conexión entre el Programa Langlands geométrico y el trabajo que yo realicé en Moscú como estudiante. Los resultados de este trabajo eran fundamentales para el nuevo enfoque de Drinfeld, y esto, a la vez, cambió mi vida matemática: desde entonces el Programa Langlands ha jugado un papel predominante en mi investigación.

Así que volvamos a Moscú y veamos adónde fui tras publicar mi primer artículo académico acerca de grupos de trenzas.

Capítulo 10
En el bucle

En Moscú, en otoño de 1966, yo me encontraba en tercer curso de mis estudios en Kerosinka. Con el artículo acerca de los grupos de trenzas acabado y enviado, Fuchs tenía una pregunta para mí:

—¿Qué quieres hacer ahora?

Yo quería otro problema que resolver. Resultó que durante varios años Fuchs había estado trabajando con su antiguo estudiante Boris Feigin en representaciones de «álgebras de Lie». Fuchs dijo que era un área activa con muchos problemas sin resolver y con estrechos vínculos con la física cuántica. Eso captó mi atención. Pese a que Yevgueni Yevguénievich me había «convertido» a las matemáticas, e incluso pese a que yo estaba entusiasmado con ellas, nunca había perdido mi fascinación de infancia por la física. Que los términos «matemáticas» y «física cuántica» fueran de la mano en una frase me seducía.

Fuchs me pasó un artículo de investigación de ochenta páginas que él y Feigin habían realizado.

—Primero pensé en pasarte un libro de texto acerca de las álgebras de Lie —me dijo—, pero luego pensé: «¿por qué no darte directamente este artículo?».

Deposité el artículo con cuidado en mi mochila. Por aquella época estaba aún sin publicar, y gracias a los estrictos controles de las autoridades soviéticas (preocupadas por la posibilidad de que la gente pudiera copiar literatura prohibida, como los libros de Solzhenitsin, o el *Doctor Zhivago*) sobre las fotocopiadoras, tan sólo había un puñado de copias disponibles en todo el mundo. Muy poca gente había llegado a ver este artículo: Feigin bromearía, tiempo después, diciendo que yo era el único en haberlo leído de principio a fin. Estaba escrito en inglés y se suponía que debía aparecer en una antología de artículos publicados en Estados Unidos. Pero el editor administró extraordinariamente mal el libro, y su publicación se demoró unos quince años.

Para entonces, muchos de los resultados se habían reproducido en otros lugares, de modo que, cuando salió a la luz, tampoco fue una lectura muy novedosa. En cualquier caso, el artículo se hizo famoso y a Feigin y Fuchs, finalmente, se les concedió el crédito que merecían por él. Su artículo se ha citado hasta la saciedad en literatura (como «preimpresión de Moscú») e incluso se acuñó un nuevo término («representaciones de Feigin-Fuchs») para referirse a las nuevas representaciones de álgebras de Lie que estudiaban en aquel artículo.

Conforme comencé a leer el artículo mi primera pregunta fue: ¿qué eran esos objetos de nombre tan extraño, «álgebras de Lie»? El artículo de Fuchs daba por sentado cierto conocimiento acerca de temas que yo nunca había estudiado, así que fui a una librería y compré todos los libros acerca de álgebras de Lie que encontré. Lo que no pude conseguir, lo alquilé en la biblioteca de Kerosinka. Iba leyendo todos esos libros en paralelo al artículo de Fuchs y Feigin. Esta experiencia modeló mi manera de aprender. Desde entonces, jamás me he conformado con una sola fuente: intento hallar todas las fuentes disponibles y las devoro.

Para entender qué son las álgebras de Lie primero he de explicarle acerca de los «grupos de Lie». Ambos se llaman así en honor al matemático noruego Sophus Lie (se pronuncia «li») que los inventó.

Los conceptos matemáticos habitan en el Reino Matemático de la misma manera en que los animales pueblan el Mundo Animal: están vinculados unos a otros, forman familias y subfamilias, y a menudo dos conceptos diferentes se reproducen y tienen descendencia.

El concepto de «grupo» es un buen ejemplo. Piense en los grupos como en análogos de las aves, que forman una clase en el reino animal o *Animalia* (clase Aves). Esa clase se divide en veintitrés órdenes; cada orden se divide a su vez en familias, y cada una de estas se subdivide, a su vez, en los géneros. Por ejemplo, el águila pescadora africana pertenece al orden de los *Accipitriformes*, a la familia *Accipitridae*, y al género *Haliaeetus* (¡comparado con esos nombres,

«grupo de Lie» no suena tan exótico!). De la misma manera, los grupos forman una amplia clase en los conceptos matemáticos, y dentro de esta clase hay diferentes «órdenes», «familias» y «géneros».

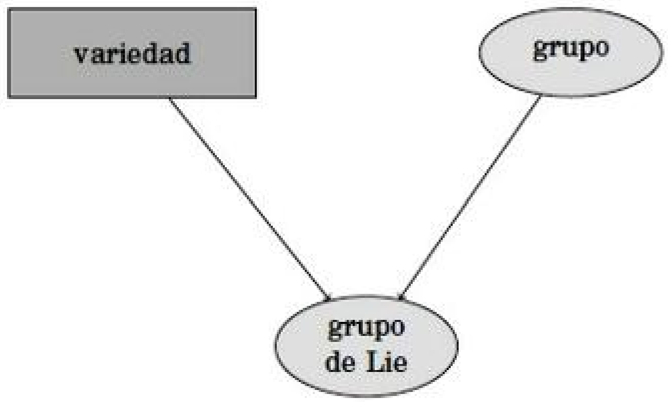
Por ejemplo, hay un orden de grupos finitos que incluye a todos los grupos con elementos finitos. El grupo de simetrías de una mesa cuadrada, que vimos en el capítulo 2, tiene cuatro elementos, de modo que es un grupo finito. De la misma manera, el grupo de Galois de un cuerpo numérico obtenido al unir las soluciones de una ecuación polinómica a los números racionales es un grupo finito (por ejemplo, en el caso de la ecuación cuadrática tiene dos elementos). La clase de grupos finitos se subdivide a su vez en familias, como la de grupos de Galois. Otra familia es la de los grupos cristalográficos, que son los grupos de simetrías de varios cristales.

Hay otro orden, el de los grupos infinitos. Por ejemplo, el grupo de enteros es infinito, como lo es también el grupo de trenzas B_n, del que hablamos en el capítulo 5, para cada n = 2, 3, 4... dado (B_n consiste en trenzas con n hebras, hay infinitas trenzas de ese tipo). El grupo de rotaciones de una mesa redonda, que consiste en todos los puntos de una circunferencia, es también un grupo infinito.

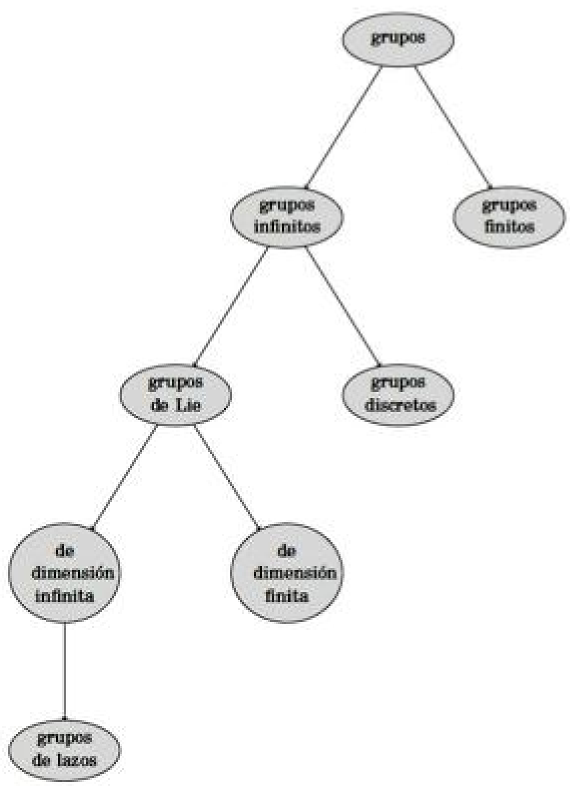
Pero hay una importante diferencia entre el grupo de números enteros y el grupo circular. El grupo de números enteros es discreto, es decir: sus elementos no se combinan en una figura geométrica continua de ninguna forma en un sentido natural. No podemos movernos de modo continuo de un entero al siguiente: saltamos de uno al otro. En cambio, podemos cambiar el ángulo de rotación de manera continua entre 0 y 360 grados. Y juntos, estos ángulos suman una forma geométrica: el círculo. Los matemáticos llaman a estos grupos *variedades*.

El grupo de números enteros y el grupo de trenzas pertenecen a la familia de los grupos infinitos discretos en el Reino Matemático. Y el grupo circular pertenece a otra, la de los grupos de Lie. Para simplificar, podemos decir que un grupo de Lie es un grupo cuyos elementos son puntos de una variedad. De

modo que este concepto es la descendencia de dos conceptos matemáticos: grupo y variedad.



Este es el árbol de conceptos relacionados con grupos de que hablaremos en este capítulo. (Algunos de estos conceptos aún no han aparecido, pero lo harán más adelante en este mismo capítulo).



Muchas simetrías de la naturaleza se explican mediante grupos de Lie, y es por eso por lo que es tan importante estudiarlos. Por ejemplo, el grupo SU(3) del que hablamos en el capítulo 2, y que se emplea para clasificar partículas elementales, es un grupo de Lie.

He aquí otro ejemplo de un grupo de Lie: el grupo de rotaciones de una esfera. La rotación de una mesa redonda viene determinada por su ángulo. Pero en el caso de una esfera, hay más libertad: además del ángulo de rotación tenemos que especificar el eje, como vemos en la gráfica. El eje puede ser toda recta que pase por el centro de la esfera.



El grupo de rotaciones de la esfera tiene un nombre propio en matemáticas: el grupo especial ortogonal del espacio tridimensional, o, como se le suele abreviar, SO(3). Podemos pensar en las simetrías de la esfera como en transformaciones del espacio tridimensional en que está incrustada. Estas

transformaciones son ortogonales, lo que significa que conservan todas las distancias.[93] Por cierto, esto nos da una representación tridimensional del grupo SO(3), un concepto que vimos por primera vez en el capítulo 2.

Del mismo modo, el grupo de rotaciones de la mesa redonda, del que hemos hablado antes, se denomina SO(2); estas rotaciones son transformaciones ortogonales especiales del plano, que es bidimensional. Por tanto, tenemos una representación bidimensional («2-dimensional») del grupo SO(2).

Los grupos SO(2) y SO(3) no son sólo grupos, también son variedades, es decir: formas geométricas. El grupo SO(2) es una circunferencia, que es una variedad. De modo que SO(2) es un grupo y una variedad. Por eso decimos que es un grupo de Lie. Del mismo modo, elementos del grupo SO(3) son puntos de otra variedad, pero es más complicado visualizarlo. (Nótese que esta variedad *no* es una esfera). Recordemos que cada rotación de la esfera viene determinada por el eje y por el ángulo de rotación. Veamos ahora que cada punto de la esfera da lugar a un eje de rotación: la recta que conecta este punto con el centro de la esfera. Y el ángulo de rotación es lo mismo que un punto de la circunferencia. De modo que un elemento del grupo SO(3) está determinado por un punto de la esfera (que determina el eje de rotación) y un punto de la circunferencia (que determina el ángulo de rotación).

Quizá deberíamos comenzar por una pregunta más sencilla: ¿cuál es la dimensión de SO(3)? Para contestarla, debemos tratar el significado de «dimensión» de un modo más sistemático. Ya hemos mencionado, en el capítulo 2, que el mundo que nos rodea es tridimensional. Es decir, que para poder fijar la posición de un punto en el espacio, hemos de especificar tres números o coordenadas (x, y, z). Un plano, por otra parte, es bidimensional: una posición en el plano se especifica mediante dos coordenadas (x, y). Y una recta es unidimensional: sólo hay una coordenada.

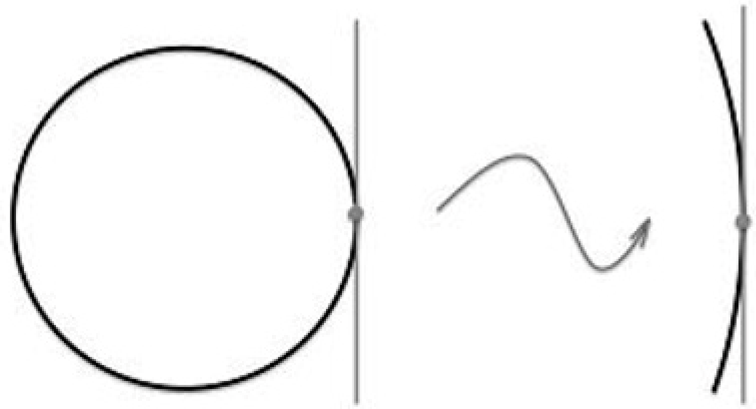
Pero ¿cuál es la dimensión de una circunferencia? Es tentador decir que una circunferencia es bidimensional porque la podemos dibujar en el plano, que es bidimensional. Todos los puntos de la circunferencia, cuando se les ve como

puntos del plano, se describen mediante dos coordenadas. Pero la definición matemática de la dimensión de un objeto geométrico dado (como una circunferencia) es el número de coordenadas independientes que necesitamos *en ese objeto* para señalar cualquier localización en el mismo. Este número no tiene nada que ver con la dimensión del paisaje en que este objeto está inscrito (como un plano). En efecto, también podemos inscribir una circunferencia en un espacio tridimensional (pensemos, por ejemplo, en un anillo en un dedo) o en un espacio de dimensión incluso mayor. Lo que importa es que, para una circunferencia dada, la posición de cualquiera de sus puntos se puede describir con un número: el ángulo. Este es la única coordenada en la circunferencia. Por eso decimos que la circunferencia es unidimensional.

Evidentemente, para hablar de ángulo, deberemos escoger un punto de referencia en la circunferencia, correspondiente al ángulo 0. De igual modo, a fin de asignar una coordenada x a cada punto de una línea deberemos escoger un punto de referencia en ella, correspondiente a $x = 0$. Podemos fijar un sistema de coordenadas sobre cualquier objeto de varias formas distintas. Pero todos estos sistemas de coordenadas tendrán el mismo *número* de coordenadas, y es a ese número al que se denomina *dimensión* del objeto.

Tengamos en cuenta que conforme nos acercamos y miramos un entorno cada vez más pequeño del punto de la circunferencia, la curvatura de esta desaparece. No existe prácticamente diferencia alguna entre el pequeño entorno del punto de una circunferencia y el pequeño entorno del mismo punto en una tangente a la circunferencia. La tangente es la recta que es la aproximación más cercana a la circunferencia en este punto.

Esto demuestra que la circunferencia y la recta tienen la misma dimensión.[94]



Conforme nos acercamos a un punto, la circunferencia y la tangente se parecen cada vez más la una a la otra.

La esfera está también inscrita en un espacio tridimensional, pero sus dimensiones intrínsecas son dos. En efecto, hay dos coordenadas independientes en la esfera: latitud y longitud. Lo sabemos porque las empleamos para determinar una posición en la Tierra, que tiene una forma muy cercana a la de una esfera. La retícula que hay sobre la esfera de la ilustración que hemos visto previamente está compuesta por los «paralelos» y «meridianos», que corresponden a valores fijos de latitud y longitud. El que haya dos coordenadas en la esfera nos revela que es bidimensional.

¿Qué pasa con el grupo de Lie SO(3)? Todo punto de SO(3) es una rotación de la esfera, de modo que tenemos tres coordenadas: el eje de la rotación (que puede especificarse como un punto en que el eje atraviesa la esfera) se describe mediante dos coordenadas, y el ángulo de rotación nos proporciona la tercera coordenada. De aquí que las dimensiones del grupo SO(3) sean tres.

Pensar en un grupo de Lie (o en una variedad) de más de tres dimensiones puede ser muy difícil. Nuestro cerebro está «cableado» de tal manera que sólo podemos imaginar formas geométricas, o variedades, de hasta tres dimensiones. Incluso imaginar la combinación tetradimensional de espacio-tiempo es una tarea extenuante: sencillamente, no concebimos el

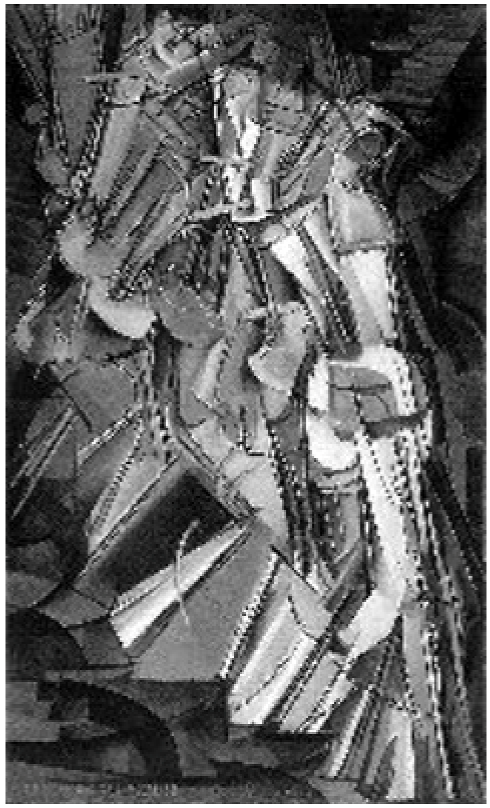
tiempo (que constituye la cuarta dimensión) como un equivalente a una dimensión espacial. ¿Y qué pasa cuando hay más dimensiones? ¿Cómo podemos analizar variedades penta, hexa, o 100-dimensionales?

Piense en ello en estos términos: los cuadros nos ofrecen representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales. Los artistas pintan proyecciones bidimensionales de esos objetos en los lienzos y emplean la técnica de la perspectiva para crear la ilusión de profundidad (la tercera dimensión) en sus obras. Podemos hacer lo mismo con objetos tetradimensionales analizando sus proyecciones tridimensionales.

Otra manera más eficaz de imaginar una cuarta dimensión es pensar en un objeto tetradimensional como en un grupo de «rodajas» tridimensionales. Sería similar a cortar en rodajas una barra de pan, que es tridimensional, pero en rodajas tan finas como para poder pensar en ellas como si fueran bidimensionales.

Si la cuarta dimensión representa el tiempo, a este «corte en rodajas» tetradimensional se le conoce como fotografía. En efecto, tomar instantáneas de una persona en movimiento nos ofrece una rodaja tridimensional de un objeto tetradimensional que representa a esa persona en el espacio-tiempo tetradimensional: luego esta «rodaja» se proyecta en un plano. Al tomar varias imágenes en sucesión obtenemos una colección de estas rodajas. Si las pasamos rápidamente ante nuestros ojos podemos ver ese movimiento. Esta es, evidentemente, la idea básica del cine.

Podemos también transmitir la impresión de una persona en movimiento yuxtaponiendo las imágenes. A principios del siglo XX, hubo pintores que se interesaron por esta idea y la emplearon como un modo de incluir una cuarta dimensión en sus pinturas, a fin de darles dinamismo. Un hito de esta tendencia es el cuadro de 1912 de Marcel Duchamp *Desnudo bajando una escalera, nº 2*.



Es interesante señalar que la teoría de la relatividad de Einstein, que demostraba que espacio y tiempo son inseparables, apareció más o menos por la misma época. Esto llevó la noción de continuo espaciotemporal tetradimensional a primer plano en la física. En paralelo, matemáticos como Henri Poincaré se adentraban aún más en las profundidades de la geometría multidimensional y trascendían el paradigma euclidiano.

Duchamp estaba fascinado tanto por la idea de una cuarta dimensión como por la geometría no euclidiana. Tras leer el libro *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et introduction à la géométrie à n dimensions*,[xvii] de E. P. Jouffret, que presentaba, especialmente, las innovadoras ideas de Poincaré, Duchamp escribió la siguiente nota:[95]

> *La sombra proyectada por una figura tetradimensional en nuestro espacio es una sombra tridimensional (véase Jouffret,*

[xvii] Empleo el título del original publicado por Gauthier-Villars en 1903, cuyo título traduce el autor al inglés. (*N. del t.*).

Geom. en 4-dim., p. 186, últimas 3 líneas)… por analogía con el método por el que los arquitectos representan un plano de cada nivel de una casa, una figura tetradimensional se puede representar (en cada uno de sus niveles) mediante secciones tridimensionales. Será la 4.a dim. la que unirá estos niveles unos con otros.

Según la historiadora del arte Linda Dalrymple Henderson,[96] «Duchamp halló algo deliciosamente subversivo en las nuevas geometrías y su desafío a tantas "verdades" establecidas». El interés de Duchamp y otros artistas de la época por la cuarta dimensión, escribe, fue uno de los elementos que llevó al nacimiento del arte abstracto.

Así, las matemáticas contribuyeron al arte; permitieron a los pintores ver dimensiones ocultas y les inspiraron a exponer, en formas estéticas hipnóticas, profundas verdades sobre nuestro mundo. Las obras de arte moderno que crearon contribuyeron a elevar nuestra percepción de la realidad y afectaron a nuestra consciencia colectiva. Esta, a su vez, influyó a las siguientes generaciones de matemáticos. El profesor de ciencias Gerald Holton lo expresaba de modo elocuente:[97]

En efecto, una cultura se mantiene viva por la interacción entre todas sus partes. Su progreso es un proceso alquímico, en el que todos sus variados ingredientes pueden combinarse para formar nuevas piedras preciosas. Acerca de esto, supongo que Poincaré y Duchamp están de acuerdo conmigo y entre sí, al haberse encontrado ambos en algún punto de ese hiperespacio que ambos, cada uno a su manera, amaban tanto.

Las matemáticas nos permiten percibir la geometría en todas sus encarnaciones, formas y especies. Son un lenguaje universal que se aplica igual de bien en todas las dimensiones, podamos visualizar los objetos

correspondientes o no, y nos permiten ir más allá de los límites visuales de nuestra imaginación. Charles Darwin escribió que las matemáticas nos dotan de «un sentido extra».[98]

Por ejemplo, aunque no podemos imaginar un espacio tetradimensional, podemos describirlo matemáticamente. Sencillamente representamos este espacio como cuartetos de números (x, y, z, t) del mismo modo que representamos puntos en un espacio tridimensional mediante tercetos de números (x, y, z). Igualmente, podemos ver puntos de un espacio plano n-dimensional, para cualquier entero n, grupos de n números (los analizamos del mismo modo que las filas y columnas de una hoja de cálculo, como ya vimos en el capítulo 2).

Quizá debería explicar por qué digo que estos espacios son planos. Una recta, está claro, es plana, y lo mismo pasa con un plano. Pero no resulta tan evidente que debamos analizar el espacio tridimensional como algo plano. Nótese aquí que no estoy hablando de las distintas variedades curvas inscritas en el espacio tridimensional, como la esfera o el toro; estoy hablando del propio espacio. La razón es que no tiene curvatura. La definición matemática exacta de curvatura es sutil (la dio Bernhard Riemann, el creador de las superficies de Riemann) y no entraremos ahora en detalles, pues es tangencial con respecto a nuestro propósito inmediato. Una buena manera de pensar en lo plano del espacio tridimensional es darse cuenta de que posee tres ejes de coordenadas infinitos y perpendiculares unos a los otros, del mismo modo en que un plano tiene dos ejes de coordenadas perpendiculares. De igual modo, un espacio n-dimensional, con n ejes de coordenadas perpendiculares, no posee curvatura y es, por tanto, plano.

Los físicos han pensado durante décadas que habitamos en un espacio tridimensional plano, pero, como vimos en el prefacio, Einstein demostró con la teoría de la relatividad general que la gravedad hace que el espacio se curve (la curvatura es pequeña y no la notamos en nuestra vida cotidiana, pero no es cero). Por lo tanto, nuestro espacio es un ejemplo de una variedad

tridimensional curva.

Esto nos lleva a la pregunta de cómo puede un espacio curvo existir por sí mismo sin estar inscrito en un espacio plano de más dimensiones, de la misma manera en que una esfera está inscrita en un espacio tridimensional plano. Estamos acostumbrados a pensar que el espacio en que vivimos es plano, por lo que, en nuestra experiencia cotidiana, las formas curvas parecen aparecer tan sólo dentro de los confines de ese espacio plano. Pero se trata de un malentendido, una falsa noción debida a nuestra estrecha percepción de la realidad. Y lo irónico es que, para empezar, ¡el espacio en que vivimos no es plano! Las matemáticas nos ofrecen una salida a esta trampa: como Riemann demostró, los espacios curvos existen de modo intrínseco, como objetos independientes, sin un espacio plano que los contenga. Lo que necesitamos para definir estos espacios es una regla que mida distancias entre dos puntos de este espacio (regla que ha de satisfacer ciertas propiedades).

Esta regla es lo que los matemáticos denominan una métrica. Los conceptos matemáticos de métrica y de tensor de curvatura, introducidos por Riemann, son las piedras angulares de la teoría de la relatividad general de Einstein.[99]

Las formas curvas, o variedades, pueden tener dimensiones arbitrariamente altas. Recordemos que la circunferencia se define como el conjunto de puntos, en un plano, equidistantes a un punto dado (o, como insistía mi examinador en la MGU, ¡el conjunto de *todos* esos puntos!). Del mismo modo, una esfera es el conjunto de todos los puntos, en un espacio tridimensional, equidistantes con respecto a un punto dado. Definamos ahora el análogo pluridimensional de una esfera (algunas personas la llaman *hiperesfera*) como el conjunto de puntos equidistantes con respecto a un punto dado en el espacio n-dimensional. Esta condición nos impone una restricción con respecto a las coordenadas n. Por tanto, las dimensiones de la hiperesfera en el espacio n-dimensional serán de (n -1). Más aún: podemos estudiar el grupo de Lie de rotaciones de esta hiperesfera.[100] Se le denomina SO(n).

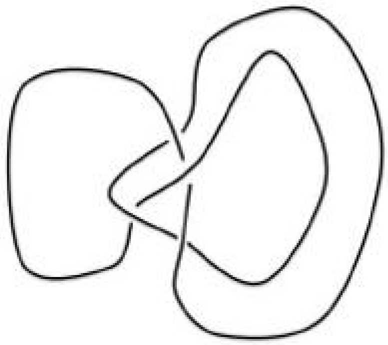
Desde el punto de vista de la taxonomía de grupos del Reino Matemático, la

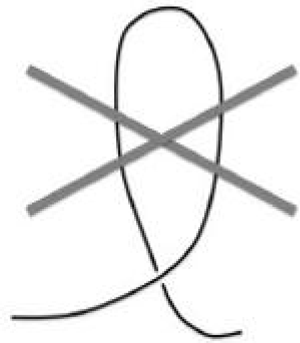
familia de los grupos de Lie se divide en dos géneros: el de los grupos de Lie de dimensión finita, como el grupo circular y el grupo SO(3), y el de los grupos de Lie de dimensión infinita. Nótese que cualquier grupo de Lie de dimensión finita es, de por sí, infinito, en el sentido de que posee infinitos elementos. Por ejemplo, el grupo circular posee infinitos elementos (los puntos de la circunferencia). Pero es unidimensional porque todos sus elementos pueden describirse mediante una sola coordenada (el ángulo). Con un grupo de Lie de dimensión infinita, necesitamos infinitas coordenadas para describir sus elementos. Este tipo de «doble infinito» es realmente difícil de imaginar. Sin embargo, estos grupos existen en la naturaleza, de modo que también tenemos que estudiarlos. Ahora describiré un ejemplo de grupo de Lie de dimensión infinita conocido como grupo de lazos.

Para explicar en qué consiste, pensemos primero en lazos en el espacio tridimensional. En términos sencillos, un lazo es una curva cerrada, como la que mostramos abajo en el gráfico de la izquierda. Ya los habíamos visto cuando hablábamos de grupos de trenzas (los llamábamos «nudos»).[101] Quiero recalcar que una curva no cerrada, como la que se muestra en la gráfica de la derecha, *no* se considera un lazo.

De igual manera, podemos imaginar lazos (es decir, curvas cerradas) dentro de cualquier variedad *M*. El espacio de estos lazos se conoce como espacio de lazos de *M*.

Como veremos con más profundidad en el capítulo 17, estos lazos juegan un papel importante en la teoría de cuerdas. En la física cuántica convencional, los objetos fundamentales son las partículas elementales, como los electrones y los quarks. Son objetos similares a puntos, sin estructura interna; es decir, son cero-dimensionales. En la teoría de cuerdas se postula que los objetos fundamentales de la naturaleza son cuerdas unidimensionales.[102] Una cuerda cerrada no es sino un lazo inscrito en una variedad *M* (el espacio-tiempo). Es por eso por lo que los espacios de lazos son pieza fundamental en teoría de cuerdas.


Esto es un lazo


Esto *no* es un lazo

Veamos ahora el espacio de lazos del grupo de Lie SO(3). Sus elementos son lazos en SO(3). Observemos de cerca uno de estos lazos. En primer lugar, se parece al lazo de la ilustración de antes. En efecto, SO(3) es tridimensional, de modo que a pequeña escala se parece al espacio plano tridimensional. En segundo lugar, todo punto de este lazo es un elemento de SO(3), es decir: una rotación de la esfera. De aquí que nuestro lazo sea un objeto sofisticado: es una colección uniparamétrica de rotaciones de la esfera. Dados dos lazos como este, podemos obtener un tercero al componer las correspondientes rotaciones de la esfera. Así, el espacio de lazos de SO(3) se convierte en un grupo. Lo llamamos grupo de lazos de SO(3).[103] Se trata de un buen ejemplo de grupo de Lie de dimensión infinita: en realidad, no podemos describir sus elementos mediante un número finito de coordenadas.[104]

El grupo de lazos de cualquier otro grupo de Lie, como, por ejemplo, el grupo SO(*n*) de rotaciones de una hiperesfera, es también un grupo de Lie de dimensión infinita. Estos grupos de lazos surgen como simetrías en teoría de cuerdas.

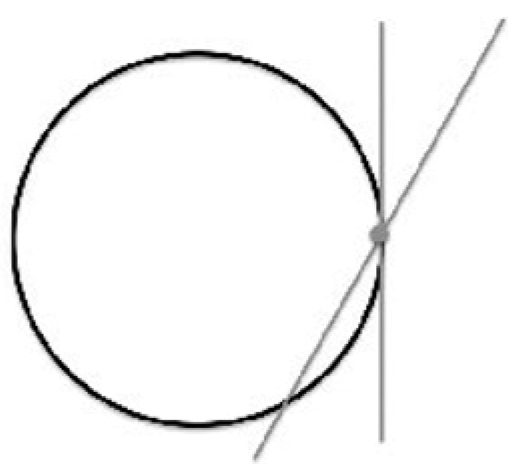
El segundo concepto relevante de cara al artículo de Feigin y Fuchs que yo estaba estudiando era el concepto de álgebra de Lie. Todas las álgebras de Lie son, en cierto sentido, la versión simplificada de un grupo de Lie.

El término «álgebra de Lie» parece pensado para crear confusión. Cuando

oímos la palabra «álgebra» pensamos en la asignatura que estudiamos en el instituto, como la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Sin embargo, ahora encontramos la palabra «álgebra» con una connotación diferente: como parte de la frase indivisible «álgebra de Lie», en referencia a objetos matemáticos con propiedades específicas. Pese a lo que el nombre sugiere, estos objetos no forman una familia en la clase de las álgebras, en la manera en que los grupos de Lie forman una familia en la clase de grupos. No importa: habrá que aceptar esta incoherencia en el nombre.

Para explicar qué es una álgebra de Lie, primero he de explicarle el concepto de *espacio tangente*. No se preocupe, no nos estamos *yendo por la tangente*: estamos siguiendo una de las ideas clave de cálculo, llamada «linealización», es decir, aproximación a formas curvas por parte de formas planas o lineales. Por ejemplo, el espacio tangente a una circunferencia en un punto dado es la recta que pasa por este punto y es la recta más próxima a la circunferencia de todas las rectas que pasan por ese punto. Ya lo habíamos visto antes cuando hablábamos de la dimensión de la circunferencia. La recta tangente toca a la circunferencia en ese punto en particular, y lo hace apenas, mientras que todas las demás rectas que pasan por ese punto cruzan la circunferencia también por otro punto, como se ve en el gráfico.



De igual manera, se puede hacer una aproximación de cualquier curva (es decir, una variedad unidimensional) en un entorno de un punto dado por una recta tangente. René Descartes, que describió un eficaz método para calcular estas rectas tangentes en su *Géométrie*, publicada en 1637, escribía:[105] «Me atrevería a decir no sólo que es el problema de geometría más útil y general que conozco, sino también que haya deseado conocer». También se puede hacer la aproximación a una esfera mediante un plano tangente en un punto dado. Piense en una pelota de baloncesto: cuando la dejamos en el suelo, toca este sólo por un punto, y el suelo se convierte en su plano tangente en ese punto.[106] Y una variedad *n*-dimensional podría ser aproximada en un punto dado por un espacio *n*-dimensional plano.

Ahora bien, en todo grupo de Lie tenemos un punto especial, que es el elemento identidad del grupo. Llevamos el espacio tangente del grupo de Lie a este punto y... *voilà*! Tenemos el álgebra de Lie de este grupo de Lie. De modo que todo grupo de Lie tiene su álgebra de Lie, que es como su hermana pequeña.[107]

Por ejemplo, el grupo circular es un grupo de Lie, y su elemento identidad es un punto en especial de la circunferencia[108] que se corresponde con el ángulo 0. La tangente en este punto es, por lo tanto, el álgebra de Lie del grupo circular. Lamentablemente no podemos realizar un dibujo de SO(3) y su espacio tangente, puesto que ambos son tridimensionales. Pero la teoría matemática que describe espacios tangentes está creada de tal manera que funciona igual de bien en todas las dimensiones. Si queremos imaginar cómo funcionan las cosas, podemos realizar modelos en una o dos dimensiones (como una circunferencia o una esfera). Así, empleamos variedades de menos dimensiones como metáforas de variedades más complicadas y de más dimensiones. Pero no necesitamos hacerlo así: el lenguaje de las matemáticas nos permite trascender nuestra limitada intuición visual. Matemáticamente, el álgebra de Lie de un grupo de Lie *n*-dimensional es un espacio plano *n*-dimensional, también llamado espacio vectorial.[109]

Hay más. La operación de multiplicación en un grupo de Lie da lugar a una operación en su álgebra de Lie: dados dos elementos cualesquiera del álgebra de Lie, podemos construir un tercero. Las propiedades de esta operación son más difíciles de describir que las propiedades de multiplicación en un grupo de Lie, y por el momento no nos resultan necesarias.[110]

Un ejemplo, que será conocido para los lectores que hayan estudiado cálculo vectorial, es la operación de *producto vectorial* en el espacio tridimensional.[111] Y adivine: ¡esta operación realmente convierte el espacio tridimensional en una álgebra de Lie!

Resulta que es, en realidad, el álgebra de Lie del grupo de Lie SO(3). De modo que la aparentemente esotérica operación de producto vectorial se hereda de las reglas de composición de las rotaciones de la esfera.

Puede estar preguntándose por qué preocuparnos de las álgebras de Lie si operar con ellas es tan raro. ¿Por qué no seguir con los grupos de Lie? La razón principal es que, a diferencia de un grupo de Lie, que suele ser curvo (como una circunferencia) una álgebra de Lie es un espacio plano (como una recta, un plano, etcétera). Esto hace que el estudio de las álgebras de Lie sea mucho más sencillo que el estudio de los grupos de Lie.

Por ejemplo, podemos hablar de las álgebras de Lie de los grupos de lazos.[112] A estas álgebras de Lie, que deberíamos ver como versiones simplificadas de los grupos de lazos, se les denomina álgebras Kac-Moody en honor a dos matemáticos: Victor Kac (nacido en Rusia, emigrado a Estados Unidos, hoy en día profesor en el MIT) y Robert Moody (británico, emigrado a Canadá, hoy en día profesor en la Universidad de Alberta). Ellos comenzaron a investigar, de modo independiente, estas álgebras en 1968. Desde entonces, la teoría de las álgebras Kac-Moody ha sido una de las áreas más interesantes y de más rápido crecimiento en las matemáticas.[113]

Eran estas álgebras de Kac-Moody las que Fuchs había sugerido como tema de mi siguiente proyecto de investigación. Cuando comencé a aprender todo esto, me di cuenta de que debería estudiar muchísimo antes de llegar al punto en

que pudiera hacer algo por mí mismo. Pero estaba fascinado por el tema.

Fuchs vivía en la zona noroeste de Moscú, no lejos de una estación de tren desde la que yo podía regresar a mi ciudad natal. Solía regresar a casa todos los viernes para pasar el fin de semana, de modo que Fuchs me propuso que fuera a verle los viernes a las 5 de la tarde y que cogiera el tren tras nuestras reuniones. Solía trabajar con él unas tres horas (durante las cuales también me preparaba algo de cenar) y luego me subía al último tren, para llegar a casa cerca de la medianoche. Esos encuentros desempeñaron un papel muy importante en mi educación matemática. Los tuvimos, semana tras semana, durante todo el semestre de otoño de 1986 y después durante todo el de primavera de 1987.

No fue hasta enero de 1987 cuando acabé de leer el largo artículo de Feigin y Fuchs y me sentí capaz de comenzar a trabajar en mi proyecto de investigación. Por aquella época conseguí un pase para la Biblioteca de Ciencias de Moscú, un enorme repositorio de libros y publicaciones, no sólo en ruso (muchos de los cuales ya los tenía la biblioteca de Kerosinka) sino también en otros idiomas. Comencé a acudir regularmente para enfrascarme en decenas de publicaciones matemáticas, en busca de artículos sobre las álgebras Kac-Moody y temas afines.

Estaba también ansioso por aprender acerca de sus aplicaciones en física cuántica, que, lógicamente, seguían constituyendo una gran atracción para mí. Como he mencionado antes, las álgebras Kac-Moody desempeñan un papel importante en la teoría de cuerdas, pero también aparecen como simetrías de modelos de física cuántica bidimensional. Vivimos en un espacio tridimensional, de modo que un modelo realista que describiera nuestro mundo debería ser tridimensional. Si incluimos el tiempo, obtenemos cuatro dimensiones. Pero matemáticamente, nada nos impide construir y analizar modelos que describan mundos con otras dimensiones. Los modelos en menos de tres dimensiones son más sencillos, y tenemos más posibilidades de resolverlos. Podemos usar lo que aprendamos en ellos para enfrentarnos a los

más sofisticados modelos tridimensionales y tetradimensionales.

Esta es, en realidad, una de las principales ideas de la asignatura llamada «física matemática»: estudiar modelos de diferentes dimensiones que pueden no ser directamente aplicables a nuestro mundo físico, pero que comparten algunos de los rasgos característicos con los modelos realistas.

Algunos de estos modelos bidimensionales poseen aplicaciones en el mundo real. Por ejemplo, una lámina de metal muy fina se puede ver como un sistema bidimensional y, por tanto, un modelo bidimensional la puede describir de modo eficaz. Un ejemplo famoso es el llamado modelo Ising de partículas interactuantes en los nodos de una red bidimensional. La solución exacta del modelo de Ising por Lars Onsager proporcionó valiosas reflexiones con respecto al fenómeno de la magnetización espontánea, o ferromagnetismo. En el núcleo de los cálculos de Onsager había una simetría oculta de este modelo, lo que subraya una vez más el papel crucial de las simetrías para comprender sistemas físicos. Posteriormente se comprendería que esa simetría quedaba descrita por la llamada álgebra de Virasoro, una prima cercana de las álgebras Kac-Moody[114] (en realidad, era el álgebra de Virasoro la protagonista del artículo de Feigin y Fuchs que yo me encontraba estudiando). Hay también una amplia clase de modelos de este tipo en que las simetrías se describen adecuadamente mediante álgebras de Kac-Moody. La teoría matemática de las álgebras Kac-Moody es fundamental para comprender estos modelos.[115]

La biblioteca de Kerosinka estaba suscrita a una publicación llamada *Referativny Zhurnal*, «la Revista de Referencias». Esta revista, de publicación mensual, mostraba breves reseñas de todos los nuevos artículos, en todos los idiomas, organizados por temas, con un escueto resumen de cada uno. Comencé a leerlo habitualmente, y ¡qué valioso resultó ser! Todos los meses salía un nuevo volumen acerca de artículos matemáticos, y yo buscaba en las secciones más relevantes intentando hallar algo de interés. Si encontraba algo que parecía fascinante, anotaba la referencia y la daba en mi siguiente visita a la Biblioteca de Ciencias de Moscú. De esta manera hallé un montón de

material interesante.

Un día, mientras hojeaba el *Referativny Zhurnal*, tropecé con un artículo de un matemático japonés llamado Minoru Wakimoto, publicado en uno de los diarios que yo seguía con atención, *Communications in Mathematical Physics*. El resumen no adelantaba mucho, pero el titular hacía referencia al álgebra Kac-Moody asociada al grupo de rotaciones de la esfera, SO(3), de modo que anoté la referencia y en mi siguiente visita a la Biblioteca de Ciencias me leí el artículo.

En él, el autor creaba novedosas construcciones del álgebra Kac-Moody asociada a SO(3). Para dar una idea de lo que son, emplearé el lenguaje de la física cuántica (muy relevante, dado que las álgebras Kac-Moody describen simetrías de modelos de física cuántica). Los modelos cuánticos realistas, como los que describen las interacciones entre partículas elementales, son bastante complicados. Pero podemos construir «modelos de campo libre», mucho más sencillos e ideales, en los que no hay (o apenas hay) interacción. Los campos cuánticos, en esos modelos, son «libres» unos de otros, de ahí el nombre. A menudo es posible construir otro modelo cuántico, complicado, y por ello más interesante, dentro de uno de estos modelos de campo libre. Esto nos permite diseccionar y deconstruir los modelos más complicados, y realizar cálculos que de otro modo no serían accesibles. Estas construcciones son muy útiles, en consecuencia. Sin embargo, en los modelos cuánticos con álgebras Kac-Moody como simetrías, los ejemplos conocidos de esas construcciones de campo libre habían sido más bien de corto alcance.

Mientras leía el artículo de Wakimoto, me di cuenta casi de inmediato de que el resultado podía interpretarse como la construcción de más amplio alcance posible para el caso del álgebra Kac-Moody más sencilla, la asociada a SO(3). Comprendí la importancia de este resultado y me hizo preguntarme: ¿de dónde venía esta construcción? ¿Hay manera de generalizarla a otras álgebras Kac-Moody? Sentía que estaba preparado para enfrentarme a estas preguntas. ¿Cómo describir el entusiasmo que sentí al ver esa bella obra y darme cuenta

de su potencial? Supongo que es como cuando, tras un largo viaje, de repente la cima de una montaña aparece, completa, ante la vista. Uno aguanta el aliento, absorbe su majestuosa belleza y sólo puede exclamar: ¡caramba! Es el momento de la revelación. Aún no has alcanzado la cima, ni siquiera imaginas los obstáculos que quedan por delante, pero la atracción es irresistible, y ya te imaginas en el pico. Ahora toca conquistarlo. Pero ¿tienes la fuerza y la resistencia necesarias para hacerlo?

Capítulo 11
Conquistar la cima

Hacia verano ya estaba preparado para compartir mis hallazgos con Fuchs. Sabía que el artículo de Wakimoto le entusiasmaría tanto como a mí. Fui a ver a Fuchs a su dacha, pero a mi llegada me dijo que había un pequeño problema: había quedado el mismo día conmigo y con su colaborador y antiguo alumno Boris Feigin, sin darse cuenta, dijo, aunque yo no le creí, y muchos años más tarde me confirmó que había sido intencionado.

Fuchs me había presentado a Feigin meses atrás. Fue antes de uno de los seminarios de Gelfand, poco después de haber acabado mi artículo acerca de grupos de trenzas, y mientras empezaba a leerme el de Feigin y Fuchs. Por sugerencia de Fuchs, pregunté a Feigin qué más debería leer. Boris Lvovich, como yo me dirigía a él, tenía en aquella época sólo treinta y tres años pero ya se le consideraba una de las estrellas más rutilantes de la comunidad matemática de Moscú. Vestía tejanos y unas zapatillas muy gastadas, y aparentaba ser muy tímido. Llevaba gafas de gruesos cristales, y durante la mayor parte de nuestra conversación miró hacia abajo, evitando todo contacto visual. Huelga decir que yo también era tímido y no estaba muy seguro de mí mismo: era un estudiante primerizo, y él era ya un famoso matemático. Así que no se trató del más interesante de los encuentros. Pero de vez en cuando levantaba la vista y me miraba con una gran sonrisa que desarmaba, y eso rompió el hielo. Pude comprobar su genuina amabilidad.

Sin embargo, la sugerencia inicial de Feigin me sorprendió: me dijo que debería leer *Statistical Physics* de Landau y Lifshitz, una sugerencia que en aquel momento hallé horrible, en parte por el parecido, en tamaño y peso, entre aquel grueso volumen y el libro de texto del Partido Comunista que todos debíamos estudiar en la escuela.

En defensa de Feigin hay que decir que se trataba de un excelente consejo: en efecto, era un libro importante, y mi investigación acabaría yendo a parar a ese

campo (pese a que he de admitir, para mi vergüenza, que aún no he leído el libro). Pero en aquel momento la idea no me acabó de convencer, y quizá fue en parte por ello por lo que nuestra conversación no llegó a buen puerto. Y, en realidad, no había vuelto a hablar con Feigin, más allá del «hola» al coincidir con él en el seminario de Gelfand, hasta que me encontré con él en la dacha de Fuchs.

Poco después de mi llegada, vi por la ventana a Feigin desmontando de su bicicleta. Tras los saludos y las conversaciones triviales, nos sentamos a una mesa redonda en la cocina y Fuchs me preguntó:

—Bueno, ¿qué novedades hay?

—Pues... he encontrado un interesante artículo de un matemático japonés, Wakimoto.

—Ya veo... —se volvió hacia Feigin—. ¿Sabes algo de esto?

Feigin negó con la cabeza y Fuchs me dijo:

—Siempre lo sabe todo... Pero es bueno que no conozca este artículo: así también a él le resultará interesante escucharlo.

Me lancé a describirles la obra de Wakimoto. Como esperaba, se mostraron muy interesados. Era la primera vez que tenía ocasión de debatir en profundidad conceptos matemáticos con Feigin, y sentí de inmediato que conectábamos. Escuchaba con atención y hacía exactamente las preguntas adecuadas. Era evidente que comprendía la importancia de aquello, y pese a que su conducta seguía siendo relajada y amistosa, parecía entusiasmado. Fuchs, sobre todo, supervisaba, y estoy seguro de que estaba feliz de que su plan secreto de que Feigin y yo nos conociéramos mejor hubiera funcionado tan bien. Fue realmente una conversación asombrosa. Sentía estar muy cerca de algo importante.

Fuchs parecía sentir lo mismo. Mientras me iba, me dijo:

—Bien hecho. Ojalá este fuera tu artículo. Pero creo que ya estás listo para llevarlo al siguiente nivel.

Regresé a casa y seguí estudiando las preguntas originadas por el artículo de

Wakimoto. Este no daba explicaciones de sus fórmulas. Yo estaba realizando un trabajo de forense: intentar hallar rastros de la gran imagen oculta tras aquellas fórmulas.

Días más tarde, esa gran imagen comenzó a aflorar. En un arranque de inspiración, mientras daba vueltas por mi habitación, me di cuenta de que las fórmulas de Wakimoto procedían de la geometría. Se trataba de un descubrimiento sorprendente, porque el enfoque de Wakimoto era completamente algebraico, sin trazas de geometría.

Para explicarle mi interpretación geométrica, volvamos al grupo SO(3) de simetrías de la esfera y a su grupo de lazos. Como comenté en el capítulo anterior, un elemento del grupo de lazos de SO(3) es un conjunto de elementos de SO(3) con un elemento de SO(3) para cada punto del lazo. Cada uno de esos elementos de SO(3) actúa en la esfera mediante una rotación en particular. Eso implica que cada elemento del grupo de lazos de SO(3) da lugar a una simetría del espacio de lazos de la esfera.[116]

Me di cuenta de que podía emplear esta información para obtener una representación del álgebra Kac-Moody asociada a SO(3). Esto no nos da, todavía, las fórmulas de Wakimoto. Para conseguirlas, debemos modificarlas de cierto modo radical. Pensemos en ello como en dar la vuelta de adentro hacia fuera a un abrigo. Lo podemos hacer con cualquier abrigo, pero en la mayoría de los casos la prenda se vuelve imposible de llevar, al menos no podemos vestirla en público. Sin embargo, hay abrigos que se pueden usar por cualquiera de ambos lados. Y lo mismo ocurría con las fórmulas de Wakimoto.

Armado con este nuevo dato, intenté de inmediato generalizar las fórmulas de Wakimoto a otras álgebras Kac-Moody más complicadas. El primer paso, geométrico, funcionó bien, como en el caso de SO(3). Pero cuando intenté «invertir» las fórmulas, lo que obtuve no tenía sentido. Las matemáticas resultantes simplemente no salían. Intenté juguetear con las fórmulas, pero no hallaba una salida a mi problema. Tuve que tener en cuenta la posibilidad real de que esta construcción sólo funcionase para SO(3) y no para álgebras

Kac-Moody más generales. No había modo de saber con seguridad si el problema tenía una solución y si, de tenerla, se podía obtener con los medios disponibles. Sólo podía trabajar tan duro como pudiera y esperar lo mejor.

Pasó una semana, y fue nuevamente momento de encontrarme con Fuchs. Planeaba contarle todo acerca de mis cálculos y pedirle ayuda. Cuando llegué a la dacha, Fuchs me dijo que su mujer había ido a Moscú a hacer unos recados, y que él tenía que quedarse al cuidado de sus dos hijas.

—Pero ¿sabes qué? Feigin estuvo aquí ayer y estaba muy entusiasmado con lo que nos contaste la semana pasada. ¿Por qué no lo visitas? Su dacha está a sólo quince minutos de aquí. Le dije que te enviaría, de modo que te está esperando.

Me dijo cómo llegar y me dirigí a la dacha de Feigin.

Feigin, en efecto, estaba esperándome. Me dio una cálida bienvenida y me presentó a su encantadora esposa Inna y sus tres hijos: los dos chicos, Roma y Zhenya, de ocho y diez años y llenos de energía, y su adorable hija Lisa, de dos años de edad. En aquel momento no podía saber lo vinculado que estaría a esa maravillosa familia en los años venideros.

La mujer de Feigin nos ofreció té y pastel y nos sentamos en la terraza. Era una hermosa tarde de verano: los rayos del sol atravesaban las copas de los árboles, lo pájaros cantaban... la idílica vida rural. Pero, evidentemente, la conversación rápidamente gravitó en torno a la construcción de Wakimoto.

Resultó que Feigin también estaba pensando en ella, y en torno a líneas similares. Al principio de nuestra conversación incluso acabábamos cada uno las frases del otro. Era un sentimiento especial: me comprendía completamente, y yo le comprendía a él.

Comencé a contarle acerca de mi fracaso a la hora de generalizar la construcción a otras álgebras Kac-Moody. Feigin escuchó atentamente, y tras quedarse un rato sentado en silencio, llamó mi atención sobre un importante punto que se me había pasado por alto. Al intentar generalizar la construcción de Wakimoto, necesitamos hallar una correcta generalización de la esfera, la

variedad sobre la que SO(3) actúa mediante simetrías. En el caso de SO(3), esta elección es prácticamente única. Pero para los demás grupos existen muchas opciones. En mis cálculos, yo había dado por sentado que las generalizaciones naturales de la esfera eran los llamados «espacios proyectivos», pero no era necesariamente así: que yo no llegara a ningún lugar con ello podía deberse a que mi elección de espacios fuera mala.

Como he explicado arriba, al fin y al cabo había necesitado «invertir» las fórmulas. Toda la construcción descansaba en la esperanza de que, milagrosamente, las fórmulas resultantes acabarían teniendo sentido. Era lo que había ocurrido en el caso de Wakimoto, para el grupo más sencillo, SO(3). Mis cálculos indicaban que, para los espacios proyectivos, no sería el caso, pero esto no significaba que no se pudiera hallar una construcción mejor. Feigin me sugirió que probase con las «variedades bandera».[117]

La variedad bandera para el grupo SO(3) es la conocida esfera, de modo que para otros grupos estos espacios pueden verse como sustitutos naturales de la esfera. Pero las variedades bandera son más ricas y versátiles que los espacios proyectivos, así que había una posibilidad de que la construcción de Wakimoto funcionara con ellas.

Anochecía: hora de regresar a casa. Acordamos volver a vernos a la semana siguiente, así que me despedí de la familia Feigin y me dirigí a la estación de tren.

De vuelta a casa, en un vagón de tren vacío, con las ventanillas abiertas que dejaban entrar el aire de verano, no podía dejar de pensar en el problema. Tenía que intentar hacerlo, allí mismo, en aquel momento. Saqué un bolígrafo y un bloc de notas y comencé a escribir fórmulas para la variedad bandera más sencilla. El viejo vagón de tren, que hacía un ruido como de *staccato*, daba sacudidas de un lado a otro, y yo no conseguía sujetar el bolígrafo con firmeza, de modo que iba escribiendo las notas por cualquier lugar de la hoja. Apenas podía leer lo que había escrito. Pero en medio de este caos comenzó a surgir un patrón. Definitivamente, las cosas iban mejor con variedades bandera que con

los espacios proyectivos que yo había intentado, sin éxito, domar la semana anterior.

Unas cuantas líneas más de cálculos y… ¡Eureka! Funcionaba. Las fórmulas «invertidas» iban tan bien como en la obra de Wakimoto. La construcción se generalizaba perfectamente. Yo estaba abrumado de alegría: ¡era increíble! ¡Lo había hecho, había hallado nuevas construcciones de campo libre de álgebras de Kac-Moody!

A la mañana siguiente comprobé cuidadosamente mis cálculos. Todo encajaba. La dacha de Feigin no tenía teléfono, así que me moría de impaciencia por llamarlo y contarle mis nuevos hallazgos. Comencé a escribirlos en un formulario de carta, y cuando nos encontramos, a la semana siguiente, le expliqué acerca de los nuevos resultados.

Así fue como empezamos a trabajar juntos. Se convirtió en mi profesor, mi mentor, mi asesor, mi amigo. Al principio yo lo llamaba Boris Lvovivch, a la antigua usanza rusa, que incluía el patronímico. Posteriormente insistió en que pasara a llamarlo por el más informal Borya.

He tenido una suerte increíble con mis profesores. Yevgueni Yevguénievich me mostró la belleza de las matemáticas e hizo que me enamorara de ellas. También me ayudó a aprender las bases. Fuchs me salvó tras la catástrofe del examen de entrada de la MGU y forzó el arranque de mi estancada carrera matemática; me guio a lo largo de mi primer proyecto matemático serio, que me proporcionó confianza en mis capacidades, y me dirigió a una apasionante área de investigación en la frontera entre las matemáticas y la física. Finalmente estaba preparado para entrar en primera división. Borya demostró ser el mejor asesor que pudiera siquiera soñar en aquella fase de mi viaje vital. Era como si alguien hubiera puesto un turbocompresor a mi carrera matemática.

Borya Feigin es sin duda uno de los matemáticos más originales de su generación en el mundo entero, un visionario dotado con el sentido más profundo de las matemáticas. Me guio a través del País de las Maravillas de las

matemáticas modernas, lleno de mágica belleza y de una armonía sublime.

Ahora que ya he tenido mis propios estudiantes, aprecio incluso más lo que Borya ha hecho por mí (y lo que Yevgueni Yevguénievich y Fuchs hicieron por mí con anterioridad). ¡Ser profesor es un trabajo duro! Supongo que, en muchos aspectos, es como tener hijos: hay que sacrificarse mucho sin pedir nada a cambio. Por supuesto, las recompensas pueden ser también tremendas. Pero ¿cómo decides qué dirección señalar a tus estudiantes, cuándo ofrecerles ayuda y cuándo arrojarlos a aguas profundas y dejarlos nadar por sí mismos? Es un arte. Nadie puede enseñarte a hacerlo.

Borya cuidó mucho de mí y de mi desarrollo como matemático. Nunca me dijo qué hacer, pero hablar con él y aprender de él siempre me proporcionó una orientación. De alguna manera siempre se aseguró de que yo supiera qué quería hacer. Y con él a mi lado, siempre tuve la confianza de estar en el camino adecuado. Tuve mucha suerte de tenerlo como profesor.

Comenzaba ya el semestre de otoño de 1987, mi cuarto año en Kerosinka. Yo tenía diecinueve años y mi vida nunca había sido más apasionante. Aún vivía en la residencia de estudiantes, salía con amigos, me enamoraba... Me mantenía al día con mis estudios. Para entonces, me saltaba la mayoría de clases y estudiaba para los exámenes por mi cuenta (ocasionalmente, unos días antes del examen). Seguía sacando excelentes con la única salvedad de Política Económica Marxista, en la que sacaba algún notable (¡qué vergüenza!). Mantenía en secreto a la mayoría de gente que tenía una «doble vida» (que me llevaba la mayor parte de mi energía y tiempo): mi vida matemática con Borya.

Solía encontrarme con Borya dos veces a la semana. Su trabajo oficial estaba en el Instituto de Física de Estado Sólido, pero no tenía mucho que hacer allí, y sólo debía presentarse una vez a la semana. Los demás días trabajaba desde la casa de su madre, a sólo diez minutos andando desde la suya. También quedaba cerca de Kerosinka y de mi residencia, y era nuestro lugar de encuentro habitual. Yo llegaba a última hora de la mañana o primera hora de la tarde y trabajábamos en nuestros proyectos, a veces todo el día. La madre de

Borya regresaba de trabajar por la tarde y nos hacía la cena, y a menudo nos íbamos cada uno a su casa a eso de las nueve o diez de la noche.

Como prioridad, Borya y yo escribimos un corto resumen de nuestros resultados y lo enviamos a la revista *Russian Mathematical Surveys*. Se publicó al cabo de un año, bastante rápido para los estándares de las publicaciones matemáticas.[118] Tras sacarnos eso de encima, Borya y yo nos preocupamos de concentrarnos en profundizar en nuestro tema. Nuestra construcción era potente, y abría muchas nuevas direcciones de investigación. Empleamos nuestros resultados para comprender mejor las representaciones de las álgebras Kac-Moody. Nuestro trabajo nos permitió también desarrollar una construcción de campo libre de modelos cuánticos bidimensionales. Esto nos permitió efectuar cálculos en esos modelos que no eran accesibles anteriormente, lo que hizo que pronto los físicos se interesaran en nuestra obra.

Eran tiempos apasionantes. Los días en que Borya y yo no estábamos juntos, yo trabajaba por mi cuenta, en Moscú durante la semana y en casa los fines de semana. Seguí acudiendo a la Biblioteca de Ciencias y devorando más y más libros y artículos sobre temas íntimamente relacionados. Vivía, comía y bebía ese material. Era como si estuviera inmerso en un universo paralelo y quería permanecer allí, adentrándome más profundamente en el sueño. Con cada nuevo descubrimiento, con cada nueva idea, ese mundo mágico se convertía más y más en mi hogar.

Pero en otoño de 1988, conforme entraba en mi quinto y último año de estudios en Kerosinka, la realidad me trajo de regreso: era hora de comenzar a pensar en el futuro. Aunque estaba entre los mejores de mi clase, mis perspectivas se presentaban desesperanzadoras. El antisemitismo obligaba a descartar los posgrados y los mejores trabajos para licenciados. Al no tener *propiska*, residencia en Moscú, las cosas se complicaban incluso más. Se acercaba el momento de ajustar cuentas.

Capítulo 12
El Árbol del Conocimiento

Pese a que sabía que nunca me permitirían tener una carrera académica, seguí estudiando matemáticas. Mark Saul habla de ello en su artículo[119] refiriéndose a mí por el diminutivo de mi nombre, Edik:

¿Qué impelía a Edik y a otros a continuar, como los salmones, contra la corriente? Todo indicaba que la discriminación que habían sufrido a escala universitaria continuaría en sus vidas profesionales. ¿Por qué, pues, deberían prepararse tan intensamente y contra toda probabilidad para una carrera en matemáticas?

Yo no esperaba recibir nada a cambio que no fuera la mera alegría y pasión de la investigación intelectual. Quería dedicar mi vida a las matemáticas sencillamente porque las amaba.

En la estancada vida del período soviético, los jóvenes de talento no podían aplicar sus energías a los negocios; la economía carecía de sector privado. En lugar de ello, se encontraba bajo un férreo control estatal. De igual manera, la ideología comunista controlaba toda carrea intelectual en las esferas de humanidades, economía y ciencias sociales. Todo libro o artículo académico en esas áreas debía comenzar, por aquella época, con citas de Marx, Engels y Lenin, y apoyar inequívocamente el punto de vista marxista sobre el tema. La única manera de escribir un artículo acerca de filosofía extranjera, por decir algo, era presentarlo como una condena de los «reaccionarios puntos de vista burgueses» de los filósofos. Aquellos que no seguían estas estrictas reglas acababan condenados y perseguidos. Lo mismo ocurría en el arte, la música, la literatura y el cine. Cualquier cosa que se pudiera ver como remotamente crítica hacia la sociedad, política o estilo de vida soviéticos, o sencillamente se desviara de los cánones del «realismo socialista», era automáticamente censurada. A los escritores, compositores y directores que se atrevían a seguir su visión artística se les prohibía, y sus obras se secuestraban o destruían.

Muchas áreas de la ciencia estaban también dominadas por la línea del partido. Por ejemplo, la genética estuvo prohibida durante muchos años porque se decía que sus hallazgos contradecían las enseñanzas del marxismo. Ni siquiera la lingüística se salvaba: después de que Stalin, quien se consideraba a sí mismo un experto en el tema (y en muchos otros) escribiera su infame ensayo *El marxismo y los problemas de la lingüística*, todo este campo de estudio se redujo a interpretar este tratado, en gran parte sin ningún sentido. A todos aquellos que no lo seguían se les reprimía.

En este entorno, las matemáticas y la física teórica eran un oasis de libertad. Aunque los *apparatchiks* del partido querían controlar todos los aspectos de la vida, estas áreas eran sencillamente demasiado abstractas y les costaba demasiado comprenderlas. Stalin, por poner un ejemplo, nunca se atrevió a realizar ninguna afirmación matemática. Pero, al mismo tiempo, los líderes soviéticos se daban cuenta de la importancia de esas aparentemente abstrusas y esotéricas áreas del conocimiento para el desarrollo de las armas nucleares, y era por eso por lo que no querían «entrometerse» en esas áreas. En consecuencia, el Gran Hermano toleraba a los matemáticos y físicos teóricos que trabajaban en el proyecto de la bomba atómica (muchos de ellos, he de añadir, a desgana) e incluso a algunos de ellos los trataba bien.

Así, por una parte, las matemáticas eran algo abstracto y barato, y por la otra, era algo útil en las áreas por las que los líderes soviéticos realmente se preocupaban, especialmente en defensa, que aseguraba la supervivencia del régimen. Era por ello por lo que a los matemáticos se les dejaba, en términos generales, hacer sus investigaciones, y no se les sujetaba a las imposiciones que tenían otros campos (a menos que intentaran meterse en política, como ocurrió con la «Carta de los 99» que mencioné antes).

Creo que esta era la razón por la que tantos jóvenes de talento escogían las matemáticas como su profesión. Era un área en la que podían dedicarse a una búsqueda intelectual en libertad.

Pero, pese a la pasión y a la alegría de investigar en matemáticas, yo

necesitaba un trabajo. Por ello, en paralelo a mi principal trabajo de investigación matemática, que realizaba en secreto con Borya, tuve que realizar algo de «investigación oficial» en Kerosinka.

Mi tutor en Kerosinka era Yakov Isaévich Khurgin, profesor en el Departamento de Matemáticas Aplicadas y uno de los miembros más carismáticos y queridos de la facultad. Antiguo alumno de Gelfand, Yakov Isaévich contaba en aquella época con sesenta y muchos años, pero era uno de los profesores más «populares» que teníamos. Debido a su interesante manera de enseñar y a su sentido del humor, sus clases tenían el mayor índice de asistencia. Pese a que ya desde tercer curso me saltaba la mayor parte de las clases, siempre intentaba asistir a sus clases sobre teoría de la probabilidad y estadística. Comencé a trabajar con él en tercer curso.

Yakov Isaévich fue muy amable conmigo. Se aseguró de que me trataran bien y estuvo allí para mí siempre que necesité ayuda. Por ejemplo, cuando tuve problemas en mi residencia de estudiantes, empleó sus influencias para intervenir. Yakov Isaévich era un hombre inteligente que aprendió bien a «trabajarse el sistema»: pese a que era judío, ocupaba una posición de prestigio en Kerosinka, como profesor y jefe de un laboratorio que realizaba investigaciones que iban desde áreas como la prospección petrolífera a la medicina.

Era también un divulgador de las matemáticas, y había escrito varios libros superventas acerca de matemáticas para no especialistas. A mí me gustaba especialmente uno de ellos, titulado *Nu i chto*? («¿Y qué? »). Trata acerca de su colaboración con científicos, ingenieros y médicos. A través de diálogos con ellos, explica de manera accesible y entretenida interesantes conceptos matemáticos (la mayoría relacionados con estadística y probabilidad, áreas en las que es experto) y sus aplicaciones. El título del libro quiere representar la curiosidad con que un matemático enfoca problemas en la vida real. Estos libros, y su pasión por hacer de las ideas matemáticas algo accesible al público me han inspirado mucho.

Durante muchos años Yakov Isaévich trabajó con médicos, en su mayor parte urólogos. Su motivación original era personal. Estaba apuntado como estudiante en Mekh-Mat cuando lo convocaron a luchar en el frente en la segunda guerra mundial. En las gélidas trincheras contrajo una grave enfermedad renal. Tuvo suerte, porque se lo llevaron al hospital y esto le salvó la vida: la mayoría de sus compañeros de clase, que estaban con él, perecieron en el campo de batalla. Pero desde aquel momento tuvo que afrontar problemas renales. En la Unión Soviética la medicina era gratuita, pero la calidad de los servicios médicos era baja. A fin de obtener un buen tratamiento, uno tenía que tener conexiones con un médico o poseer algo que ofrecer a modo de soborno. Pero Yakov Isaévich tenía algo que ofrecer que muy poca gente tenía: su experiencia como matemático. La empleó para hacerse amigo de los mejores especialistas en urología de Moscú.

Fue un gran trato para él, porque cada vez que sus riñones fallaban, tenía el mejor tratamiento de manos de los mejores urólogos en el mejor hospital de Moscú. Y fue también un buen trato para los médicos, porque él les ayudaba a analizar sus datos, que a menudo revelaban fenómenos interesantes y previamente desconocidos. Yakov Isaévich solía decir que el modo de pensar de los doctores estaba bien adaptado para analizar pacientes en particular y a tomar decisiones basadas en criterios particulares, pero les resultaba difícil ver la imagen global e intentar hallar patrones y principios generales. Es ahí donde los matemáticos somos útiles, porque nuestro modo de pensar es completamente diferente: nos enseñan a buscar y analizar estos tipos de grandes patrones. Los amigos médicos de Yakov Isaévich apreciaban esto.

Cuando me convertí en su alumno, Yakov Isaévich me enroló en sus proyectos médicos. En total, en los casi dos años y medio que trabajé con él, desarrollamos tres proyectos diferentes de urología. Los resultados los emplearon tres jóvenes urólogos para sus tesis doctorales (en Rusia había un grado posterior en medicina tras el de doctor, al nivel del doctorado de otros países, para el que se requería escribir una tesis con investigación médica

original).[xviii] Me convertí en coautor de publicaciones en revistas académicas médicas e incluso fui coautor de una patente.

Recuerdo bien el inicio del primer proyecto. Yakov Isaévich y yo fuimos a visitar al joven urólogo Alexei Velikanov, hijo de uno de los mejores médicos de Moscú. Yakov Isaévich había sido amigo (y paciente) de Velikanov padre durante muchos años, y este le había pedido que ayudara a su hijo. Alexei nos mostró una enorme hoja de papel con datos obtenidos de cerca de cien pacientes a los que se había operado de hiperplasia benigna de próstata, un tumor benigno que suele ser común en ancianos. Los datos comprendían varias características, como presión sanguínea y otros resultados de análisis, antes y después de cirugía. Esperaba poder emplear esos datos para llegar a conclusiones acerca de cuándo tenía más probabilidades de éxito la cirugía, y poder así hacer un conjunto de recomendaciones acerca de cuándo extirpar el tumor.

Necesitaba ayuda para analizar los datos y esperaba que pudiéramos ayudarlo. Después supe que esta era una situación habitual. Médicos, ingenieros y otros esperaban a menudo que los matemáticos poseyeran algún tipo de varita mágica que les permitiese extraer rápidamente conclusiones de los datos recogidos, fueran cuales fuesen. Evidentemente, esto es más un deseo que una realidad. Conocemos ciertos métodos potentes de análisis estadístico, pero muy a menudo no podemos aplicarlos porque los datos no son precisos o porque hay diferentes tipos de datos, algunos objetivos y otros, subjetivos (descripciones de cómo «se siente» el paciente, por ejemplo); otras veces los hay cuantitativos (tensión arterial, pulso) y otros cualitativos, como respuestas «sí» o «no» a diferentes preguntas específicas. Es muy difícil, si no directamente imposible, acomodar datos tan poco homogéneos en una fórmula

---

[xviii] El autor se refiere a dos sistemas de estudios diferentes. En el sistema estadounidense, el MD (doctor en Medicina) es el primer grado profesional de Medicina, en el que se requieren al menos noventa horas de crédito de trabajo universitario. El PhD (doctor en Filosofía) es el nombre del diploma de doctorado, obtenido tras la presentación de una tesis con investigación propia. Sin embargo, en algunos países, como Reino Unido, el MD es el grado superior, equivalente al doctorado en Medicina. En el sistema ruso, la carrera de Medicina dura seis años y se otorga un MD al estilo estadounidense, pero se exige una tesis doctoral para obtener el equivalente al PhD. (*N. del t.*)..

estadística.

Por otra parte, a veces hacer las preguntas correctas te permite darte cuenta de que algunos de esos datos son irrelevantes y deberían sencillamente descartarse. En mi experiencia, tan sólo un 10 o 15% de la información obtenida por los médicos se empleó para realizar el diagnóstico o las recomendaciones de tratamiento. Pero si se lo preguntas, nunca te dirán esto directamente. Insistirán en que todo es útil e incluso te saldrán con alguna situación hipotética en que deberían tener en cuenta esa información.

Lleva un poco de tiempo convencerlos de que, en realidad, en todos esos casos ellos ignoraron la mayor parte de esos datos y tomaron la decisión basándose en unos pocos criterios fundamentales.

Por supuesto, a veces había preguntas que se podían responder sencillamente introduciendo los datos en algún tipo de programa estadístico. Pero al trabajar en estos proyectos me di cuenta, gradualmente, de que si los matemáticos somos tan útiles para los médicos no es a causa de nuestro conocimiento de esos programas estadísticos (al fin y al cabo, no es algo tan difícil, cualquiera puede aprenderlo), sino debido a nuestra capacidad para formular las preguntas correctas y pasar luego a un análisis en frío y libre de sesgos a fin de obtener las respuestas. Realmente es este tipo de «enfoque matemático» el que parece más útil para quienes no están formados para pensar como los matemáticos.

En mi primer proyecto, esta capacidad nos ayudó a descartar datos irrelevantes y luego a hallar conexiones no triviales (correlaciones) entre los parámetros restantes. No fue fácil y nos llevó algunos meses, pero los resultados nos dejaron satisfechos. Escribimos un artículo conjunto acerca de nuestros hallazgos, y Alexei los empleó en su tesis doctoral. Se nos invitó, a Yakov Isaévich y a mí, a la defensa de su tesis, junto con otro estudiante de Kerosinka, Alexander Lifshitz, mi buen amigo, que también trabajó en el proyecto.

Recuerdo cómo durante la defensa de la tesis uno de los médicos preguntó el

nombre del programa informático empleado para derivar estos resultados, y que Yakov Isaévich respondió que los nombres eran «Edward y Alexander». Esto era cierto: no empleamos ningún ordenador; efectuamos los cálculos a mano o con una sencilla calculadora. El objetivo no era calcular (esa era la parte fácil), sino hacer las preguntas adecuadas. Un eminente cirujano, presente en la defensa de la tesis, comentó entonces lo sorprendente que era que unos matemáticos resultaran tan útiles en Medicina, y que quizá lo seríamos aún más en los años por venir. La comunidad médica recibió bien nuestro trabajo, y Yakov Isaévich estaba complacido.

No mucho después me pidió trabajar en otro proyecto de urología que tenía que ver con tumores renales (para otra tesis doctoral) que también resolví satisfactoriamente.

El tercer y último proyecto médico en que trabajé fue el más interesante para mí. El joven doctor Sergei Arutyunyan (quien también precisaba nuestra ayuda para analizar datos para su tesis) y yo nos compenetramos muy bien. Estaba trabajando con pacientes cuyos sistemas inmunitarios rechazaban los trasplantes de riñón. En una situación así, el médico ha de tomar rápidamente una decisión: luchar por el riñón o retirarlo, con consecuencias de amplio alcance. Si deja el riñón el paciente puede morir, pero si lo retira el paciente necesitará otro, que no será fácil de encontrar.

Sergei quería hallar una manera de saber qué recomendación era estadísticamente más viable, basándose en diagnósticos cuantitativos por ecografía. Tenía mucha experiencia en esta área y había recogido muchísimos datos. Esperaba que yo pudiera ayudarle a analizarlos y llegar a un criterio objetivo y válido de toma de decisiones que pudiera ser útil para otros médicos. Me dijo que nadie había sido capaz de hacerlo hasta aquel momento: la mayoría de médicos creían que era imposible y preferían confiar en sus enfoques *ad hoc*.

Examiné los datos. Como en nuestros proyectos previos, había como cuarenta parámetros diferentes medidos para cada paciente. Durante nuestros

encuentros periódicos hacía a Sergei preguntas específicas, intentando averiguar cuáles de esos datos eran relevantes y cuáles no. Pero esta vez era difícil. Como otros médicos, daba sus respuestas basándose en casos específicos, lo que no ayudaba mucho.

Decidí intentar un enfoque diferente. Pensé: «este hombre toma este tipo de decisiones a diario, y evidentemente es muy bueno en ello. ¿Y si me las ingenio para aprender a "ser" él? Incluso si no sé mucho acerca de los aspectos médicos del problema, puedo intentar aprender su metodología si sigo su proceso de toma de decisiones, y utilizar sus conocimientos para extraer algún conjunto de reglas».

Sugerí que jugáramos a una especie de juego.[120] Sergei había recogido datos de aproximadamente doscientos setenta pacientes. Escogí aleatoriamente datos de treinta de ellos y dejé los demás de lado. Yo tomaba el historial de cada uno de esos pacientes escogidos al azar y pedía a Sergei, que se sentaba en la esquina opuesta de la oficina, que me hiciera preguntas acerca del paciente, que yo respondía tras mirar el archivo. Mi objetivo, en todo esto, era intentar comprender el patrón de sus preguntas, incluso si no comprendía tan bien como él qué significaban esas preguntas. Por ejemplo, a veces hacía preguntas diferentes, o las misas preguntas pero en un orden distinto. En tal caso, yo le interrumpía: «La última vez no preguntaste esto. ¿Por qué lo preguntas ahora?».

Y él me explicaba: «Porque en nuestro último paciente el volumen del hígado era tal y tal, y por tanto eso excluía esta situación. Pero en el paciente actual el volumen es así y así, de modo que la situación es bastante posible».

Yo tomaba notas de todo esto e intentaba comprender tanta de esta información como fuera posible. Incluso después de tantos años lo imagino perfectamente: Sergei sentado en una silla en una esquina de su oficina, concentrado en sus pensamientos, fumando un cigarrillo (era un fumador en cadena). Me resultaba fascinante intentar desmenuzar la manera en que razonaba: era como intentar deshacer un rompecabezas para ver cómo eran

sus piezas fundamentales.

Las respuestas de Sergei me proporcionaron información extremadamente valiosa. Siempre llegaba al diagnóstico tras no más de tres o cuatro preguntas. Entonces yo lo comparaba con lo que le había pasado realmente a cada paciente. Siempre acertaba.

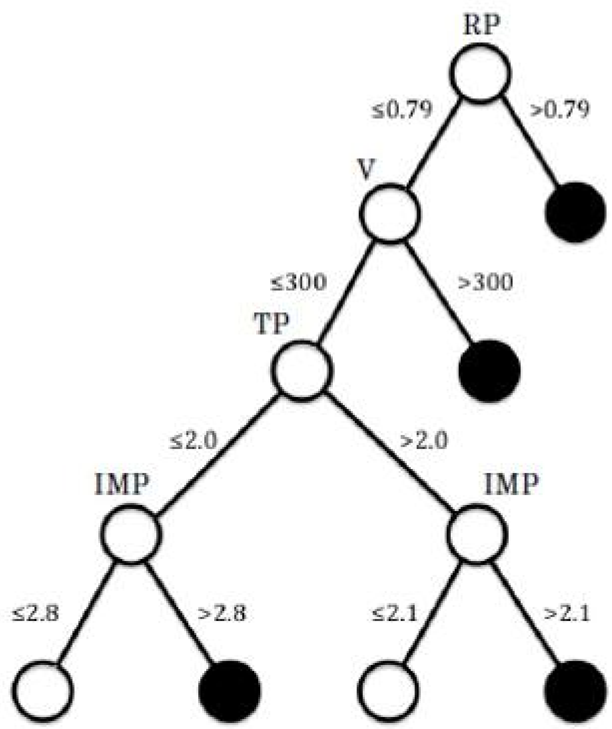
Tras un par de docenas de casos, ya podía diagnosticar yo mismo, siguiendo las sencillas reglas que había aprendido mientras le interrogaba. Tras media docena más, ya era prácticamente tan bueno como él prediciendo el resultado. En realidad, había un algoritmo sencillo en juego que Sergei seguía en la mayoría de casos.

Evidentemente, había siempre un puñado de casos en que el algoritmo no era útil. Pero incluso si uno podía obtener de manera eficaz y rápida el diagnóstico para un 90 o 95% de casos, ya era todo un logro. Sergei me contó que en la literatura acerca del tema de diagnósticos por ecografía no existía nada parecido.

Tras acabar nuestro «juego», tracé a partir de él un algoritmo que he incluido en forma de árbol de toma de decisiones en la página siguiente. De cada nodo del algoritmo surgen dos ramas a dos nodos más; la respuesta a una pregunta específica en el primer nodo dicta a cuál de los dos siguientes nodos irá el usuario. Por ejemplo, la primera pregunta trata acerca de la resistencia periférica (RP) del vaso sanguíneo dentro del trasplante. Este era un parámetro al que Sergei había llegado durante su investigación. Si su valor era mayor de 0,79 había una alta posibilidad de que el riñón estuviera siendo rechazado, y de que el paciente requiriera cirugía inmediata. En tal caso, pasamos al nodo negro de la derecha. Si no, nos movemos al nodo blanco de la izquierda y hacemos la siguiente pregunta: ¿cuál es el volumen (V) del riñón? Etcétera. Los datos de cada paciente, de esta manera, dan lugar a un sendero en particular en el árbol. Este termina tras tres o cuatro pasos (por ahora no es importante qué significan los otros dos parámetros, TP y IMP). El nodo terminal contiene el veredicto, como se ve en el gráfico: el nodo negro significa «operar», y el nodo

blanco significa «no operar».

Pasé los datos de los siguientes 240 pacientes, aproximadamente, cuyos historiales había dejado aparte, por el algoritmo. El acuerdo fue notable. En un 95% de los casos llevó a un diagnóstico correcto.



El algoritmo describía, en términos sencillos, puntos fundamentales del proceso mental de un médico al tomar la decisión, y mostraba qué parámetros, de los que describían la enfermedad, eran más relevantes para el diagnóstico. Sólo había cuatro, de los cuarenta aproximadamente del inicio. Por ejemplo, el algoritmo mostraba la importancia del índice de resistencia periférica general que había desarrollado Sergei, y que medía el flujo de sangre hacia el riñón. Que ese parámetro desempeñara un papel tan destacado en la toma de decisiones era ya, de por sí, un importante descubrimiento. Todo esto se podía emplear para futuras investigaciones en esta área. Otros médicos podían aplicar el algoritmo a sus pacientes, ponerlo a prueba y quizá incluso afinarlo

para hacerlo más eficaz.

Escribimos un artículo al respecto, que se convirtió en la base de la tesis doctoral de Sergei, y este lo sometió a una solicitud de patente que se aprobó un año después.

Yo estaba orgulloso de mi trabajo con Yakov Isaévich, y él, de mí. Sin embargo, pese a nuestra buena relación, yo mantuve mi «otra» vida matemática (mi trabajo con Fuchs y Feigin, y todo eso) en secreto, como con respecto a la mayoría de la gente. Era como si las matemáticas aplicadas fueran mi esposa, y las matemáticas puras, mi amante secreta.

Aun así, cuando llegó el momento de buscar un trabajo, Yakov Isaévich me dijo que intentaría contratarme como ayudante en su laboratorio de Kerosinka. Eso, a su vez, me permitiría convertirme en un estudiante de doctorado allí mismo un año después, lo que me abriría las puertas a un empleo en el futuro próximo. Esto parecía un plan excelente, pero había muchos obstáculos, y no era el menor de ellos el que, como habían advertido a mi padre la primera vez que fue a Kerosinka antes de que yo solicitara la entrada, que debería enfrentarme nuevamente al antisemitismo.

Evidentemente, Yakov Isaévich estaba al corriente de todo esto. Llevaba en Kerosinka varias décadas y sabía cómo funcionaba todo. Lo había contratado el propio rector Vinógradov, a quien Yakov Isaévich tenía en alta estima.

Las cuestiones relativas a mi nombramiento las tramitarían burócratas de nivel medio, no el propio Vinógradov, y esos individuos cerrarían las puertas con toda seguridad a todo aquel cuyo apellido sonara a judío, pero Yakov Isaévich sabía cómo puentear el sistema. A principios del semestre de primavera de mi último año en Kerosinka, cuando el tema de mi empleo se volvió urgente, escribió una carta nombrándome su ayudante de laboratorio. Llevaba la carta con él en su maletín, para estar preparado por si surgía la oportunidad de hablar de mí con Vinógradov.

La oportunidad se presentó muy pronto. Un día tropezó con Vinógradov mientras este entraba en Kerosinka. Vinógradov estaba encantado de verle y le

preguntó:

—¿Cómo estás, Yakov Isaévich?

—Muy mal —replicó Yakov Isaévich, grave (era un gran actor).

—¿Qué ha ocurrido?

—Hemos hecho cosas maravillosas en mi laboratorio en el pasado, pero ya no podemos hacer nada más. No consigo nuevos talentos. Tengo un gran estudiante que se gradúa este año, pero no consigo contratarlo.

Supongo que Vinógradov quería demostrar a Yakov Isaévich quién mandaba allí (que era exactamente el objetivo de Yakov Isaévich) de modo que le dijo:

—No te preocupes, me ocuparé de esto.

En ese momento, Yakov Isaévich extrajo mi carta de nombramiento. Vinógradov no tuvo más remedio que firmarla.

Por norma general, la carta debía firmarla una docena de personas antes de acabar en la mesa de Vinógradov: los jefes de la organización *Komsomol*[xix] y del Partido Comunista y todo tipo de burócratas. Seguramente podrían encontrar una manera de hacer descarrilar el proceso para que el nombramiento no tuviera lugar. Pero ¡ya tenía la firma de Vinógradov! Así que, ¿qué podían hacer? Él *era* el jefe, y no podían desobedecer sus órdenes. Apretarían los dientes y maldecirían un rato, pero finalmente se darían por vencidos y firmarían. ¡Debería haber visto sus caras cuando advirtieron la firma de Vinógradov al pie! Yakov Isaévich había puenteado el sistema de modo brillante.

[xix] Organización juvenil y estudiantil del Partido Comunista de la Unión Soviética. (*N. del t.*).

Capítulo 13
La llamada de Harvard

En medio de todo aquel estrés e incertidumbre, en marzo de 1989 llegó una carta de Estados Unidos, con el membrete de la Universidad de Harvard.

> *Estimado Dr. Frenkel:*
>
> *Por recomendación del Departamento de Matemáticas, me gustaría invitarle a visitar la Universidad de Harvard en otoño de 1989 como receptor del premio Fellowship*[xx] *Harvard.*
>
> *Sinceramente suyo,*
>
> *Derek Bok*
>
> *Presidente de la Universidad de Harvard.*

Había oído con anterioridad acerca de la Universidad de Harvard, aunque debo admitir que en aquel momento no comprendía su importancia en el mundo académico. Aun así, me sentí halagado. Que te invitaran a Estados Unidos como ganador de una beca *fellowship* parecía un gran honor. ¡Me había escrito en persona el presidente de la universidad! ¡Y se dirigía a mí como «doctor», pese a que aún no me había licenciado! Por aquel entonces estaba en mi último semestre en Kerosinka.

¿Cómo había ocurrido? El rumor de mi trabajo con Borya se estaba extendiendo. Nuestro primer artículo corto ya se había publicado y estábamos acabando otros tres, más largos, todos en inglés. El físico Lars Brink, de visita en Moscú desde Suecia, pidió uno de ellos para un volumen que estaba compilando. Se lo cedimos y le pedimos que hiciera una veintena de copias y las enviara a los matemáticos y físicos que él creyera que pudieran estar interesados en nuestro trabajo. Yo había hallado sus direcciones en artículos publicados disponibles en la Biblioteca de Ciencias de Moscú, y di la lista a Lars.

[xx] En el mundo académico, una fellowship es una beca de investigación que se concede por un tiempo limitado a licenciados o doctorados. (*N. del t.*).

Él accedió generosamente a ayudarnos porque sabía lo difícil que resultaría para nosotros enviar las copias personalmente. Aquel artículo se hizo famoso, sobre todo, por sus aplicaciones en física cuántica.

Esto ocurría varios años antes de que el uso de Internet se extendiera, y sin embargo el sistema de distribución de literatura científica era bastante eficaz: los autores hacían circular copias a máquina de sus manuscritos antes de su publicación (se les llamaba «preimpresiones»). Quienes los recibían hacían una copia y la reenviaban a sus colegas y a bibliotecas universitarias. La veintena de personas que recibieron la copia de nuestro artículo de manos de Lars Brink seguramente hicieron lo mismo.

Entre tanto, la Unión Soviética estaba experimentando tremendos cambios: era la época de la *perestroika*, instaurada por Mijaíl Gorbachov. Una de las consecuencias es que se permitió a la gente viajar al extranjero con mucha mayor libertad. Antes de eso, matemáticos como Feigin y Fuchs recibían muchas solicitudes para dar conferencias y visitar universidades en Occidente, pero los viajes fuera del país estaban estrictamente regulados por el gobierno. Antes de conseguir el típico visado de entrada al país de destino, había que conseguir el visado de salida, que permitía a la persona salir de la Unión Soviética. Se daban muy pocos de esos visados de salida, por miedo a que la gente no regresara (y, en efecto, muchos de aquellos a quienes se les concedió un visado de salida nunca regresaron). Se denegaban casi todas las peticiones, habitualmente por motivos absurdos, y una vez Fuchs me dijo que hacía años de la última vez que había intentado conseguir uno.

Pero de repente, en otoño de 1988, se permitió a varias personas viajar al extranjero, y una de ellas fue Gelfand. Otra persona era un inteligente joven matemático y amigo de Borya llamado Sasha Beilinson, quien también viajó a Estados Unidos para visitar a su antiguo coautor Joseph Bernstein, quien había emigrado unos años antes y enseñaba en Harvard.

Entre tanto, algunos científicos de Occidente se habían dado cuenta de que se avecinaban cambios e intentaron aprovechar esta oportunidad para invitar

académicos de la Unión Soviética. Una de estas personas era Arthur Jaffe, un famoso físico matemático, por aquel entonces jefe del Departamento Matemático de Harvard. Había decidido crear un nuevo puesto para jóvenes matemáticos rusos con talento. Cuando Gelfand, que había recibido un doctorado *honoris causa* de Harvard, lo visitó en 1988, Jaffe le pidió que ayudara a convencer al presidente Derek Bok, a quien Gelfand conocía en persona, de que proporcionara ayuda y fondos para su programa (parte de los fondos los proporcionó también Landon Clay, quien más tarde fundaría el Instituto Clay de Matemáticas). Jaffe lo denominó «Premio Fellowship Harvard».

Una vez el programa estuvo instaurado, la cuestión era a quién invitar, y Jaffe sondeó a varios matemáticos en busca de sugerencias. Al parecer, bastante gente mencionó mi nombre (entre ellos Beilinson) y esa era la razón por la que me habían elegido entre los cuatro primeros ganadores del premio.

A la carta del presidente Bok le siguió una más larga y detallada del propio Jaffe, en que describía los términos de la cita con más detalle. Iría para un período de entre tres y cinco meses; sería profesor visitante pero no tendría ninguna obligación formal excepto ocasionales conferencias acerca de mi trabajo; Harvard pagaría el viaje, alojamiento y gastos de manutención. Se puede decir que lo único que no aportaba Harvard era el visado de salida. Por suerte, y para sorpresa mía, lo obtuve en un mes.

Arthur Jaffe me decía en su carta que podía ir a finales de agosto y quedarme hasta finales de enero, pero yo escogí quedarme tres meses, el mínimo especificado en la carta. ¿Por qué? Bueno, yo no tenía intención de emigrar a Estados Unidos, y planeaba regresar. Además, me sentía culpable por tener que tomarme una excedencia del trabajo en Kerosinka que Yakov Isaévich me había conseguido con tanto esfuerzo.

Una vez conseguido mi visado de salida, se me hizo evidente que el viaje se estaba convirtiendo en una realidad, y que debía sincerarme con Yakov Isaévich y hablarle acerca de mis «actividades extracurriculares»: mi labor

matemática con Feigin y la invitación de Harvard. Naturalmente, se sorprendió mucho. Estaba convencido de que yo dedicaba toda mi energía a los proyectos médicos en que trabajaba con él. Su primera reacción fue bastante negativa.

—¿Y quién trabajará en mi laboratorio si te vas a Harvard? —preguntó.

En ese momento, la mujer de Yakov Isaévich, Tamara Alekseevna, que siempre me dio una cálida bienvenida a su casa, vino en mi auxilio:

—Yasha, sólo dices tonterías —dijo—. El chico ha recibido una invitación a Harvard. ¡Son grandes noticias! Definitivamente, debería ir, y cuando regrese volverá a trabajar contigo.

A desgana, Yakov Isaévich se mostró de acuerdo.

Los meses de verano pasaron rápidamente y llegó la fecha de mi partida, el 15 de septiembre de 1989. Volé de Moscú al aeropuerto JFK de Nueva York y de allí a Boston. Jaffe no podía venir personalmente al aeropuerto, pero envió a un estudiante de doctorado a recogerme. Me llevaron a un apartamento de dos habitaciones que el Departamento de Matemáticas había alquilado para mí y para otro premiado, Nicolai Reshetikhin, quien llegaría unos días más tarde. Estaba en los Jardines Botánicos, un complejo de apartamentos propiedad de Harvard, a menos de diez minutos de camino desde Harvard Yard.[xxi] Todo parecía nuevo y emocionante.

Era noche cerrada cuando llegué a mi apartamento. Con el *jet lag*, preferí irme inmediatamente a dormir. A la mañana siguiente fui a un mercado de abastos cercano y compré verduras. Ya en casa, comencé a hacerme una ensalada y me di cuenta de que no tenía sal. En el apartamento no había, de modo que tuve que comérmela sin ella.

En cuanto hube acabado llamaron al timbre. Era Arthur Jaffe. Me propuso dar una vuelta por la ciudad en su coche. Era realmente genial: un chico de veintiún años paseando en coche por la ciudad con el jefe del Departamento de Matemáticas de Harvard. Vi Harvard Yard, el río Charles, bellas iglesias y los

---

[xxi] Centro histórico y geográfico del campus de la Universidad de Harvard. (*N. del t.*).

rascacielos del centro de Boston. El tiempo era perfecto. La ciudad me impresionó mucho.

Durante el viaje de regreso, de dos horas, dije a Arthur que necesitaba comprar sal, y me respondió:

—Ningún problema, te llevaré a un supermercado que hay aquí cerca.

Era la primera vez que yo entraba en un supermercado, y fue una experiencia sorprendente. Por aquella época había escasez de alimentos en Rusia. En mi ciudad natal, Kolomna, sólo se conseguía pan, leche y las verduras básicas, como patatas. Para otros tipos de comida había que ir hasta Moscú, e incluso allí lo mejor a que se podía aspirar era una mortadela de tercera o queso. Cada fin de semana, cuando volvía a casa desde Moscú, aprovechaba para llevar algo de comida para mis padres. Así que ver pasillos enteros abarrotados de todo tipo de comida me resultaba absolutamente increíble.

«¿Cómo encuentra uno nada aquí?» pensé. Comencé a recorrer arriba y abajo los pasillos en busca de sal, pero no conseguía encontrarla. Supongo que estaba un poco mareado por la abundancia de material; en cualquier caso, ni siquiera vi los signos en la parte superior. Pregunté a un empleado del supermercado:

—¿Dónde está la sal?

Pero no pude comprender nada de lo que dijo. Mi inglés era suficientemente bueno para dar una clase de matemáticas, pero no tenía ninguna experiencia con el inglés coloquial, cotidiano. El cerrado acento bostoniano tampoco facilitaba que lo entendiera.

Pasó media hora y yo estaba desesperado, perdido en el Star Market como en un gigantesco laberinto. Finalmente encontré un paquete de sal mezclada con ajo. «Te sirve —me dije—. Salgamos de aquí». Pagué y salí de la tienda. El pobre Arthur se había preocupado (¿qué demonios estaba haciendo ese chico allá dentro durante cuarenta y cinco minutos?), así que había comenzado a buscarme.

«Perdido en la abundancia del capitalismo», pensé.

Mi adaptación a América había comenzado.

Los otros dos premiados con el Fellowship Harvard que llegaron en el semestre de otoño eran Nicolai Reshetikhin, con quien compartía mi apartamento (llegó una semana después) y Boris Tsygan.[xxii] Ambos me sacaban diez años y habían hecho ya contribuciones seminales a las matemáticas. Yo sabía de su obra pero nunca los había conocido en persona. Durante ese primer semestre forjamos una amistad que duraría toda la vida.

Nicolai, o Kolya, como muchos lo llamaban afectuosamente, era de San Petersburgo. Era ya famoso como uno de los inventores de los llamados grupos cuánticos, que son generalizaciones de los grupos comunes. Para ser más precisos, los grupos cuánticos son ciertas deformaciones de los grupos de Lie, los objetos matemáticos de los que hablamos anteriormente. Estos grupos cuánticos son ahora tan ubicuos como los grupos de Lie en muchas áreas de las matemáticas y la física. Por ejemplo, Kolya y otro matemático, Vladimir Turaev, los emplearon para construir invariantes de nudos y variedades tridimensionales.

Borya Tsygan había sido desde hacía tiempo colaborador de Boris Feigin, mi profesor. Originario de Kiev, Ucrania, Tsygan tuvo una gran idea justo al acabar la facultad, que llevó a un gran descubrimiento en el campo de la «geometría no conmutativa». Como a otros matemáticos judíos, le impedían doctorarse tras la facultad. Por ese motivo, tras graduarse en la universidad tuvo que trabajar en una planta de maquinaria pesada de Kiev, rodeado de ruidosas máquinas. Sin embargo, fue en esas condiciones, mucho menos que perfectas, cuando hizo su descubrimiento.

La gente tiende a pensar que los matemáticos trabajan en condiciones asépticas, sentándose y concentrándose en la pantalla de un ordenador, o al techo, en una oficina prístina e inmaculada. Pero la realidad es que algunas de las mejores ideas vienen cuando uno menos se lo espera, y a veces a través del

---

[xxii] Vera Serganova, cuarta premiada, llegaría en primavera. (*N. del a.*).

ruido industrial.

Al caminar por Harvard Yard y presenciar la anticuada arquitectura de ladrillo rojo, la estatua de Harvard,[xxiii] las agujas de las antiguas iglesias, no pude sino sentir la exclusividad del lugar, junto a su larga tradición de búsqueda del conocimiento e incansable fascinación por el descubrimiento.

El Departamento de Matemáticas de Harvard estaba situado en el Centro Científico, un moderno edificio justo a las afueras de Harvard Yard. Tenía el aspecto de una gigantesca nave espacial alienígena que hubiera aterrizado en Cambridge, Massachusetts, y hubiera decidido quedarse. El Departamento de Matemáticas ocupaba tres pisos. Dentro, los despachos se mezclaban con áreas comunes que contaban con máquinas de café y cómodos sofás. Había también una bien diseñada biblioteca matemática propia y hasta una mesa de *ping-pong*. Todo esto creaba una atmósfera acogedora, e incluso en medio de la noche podía encontrar uno un montón de gente por allí: jóvenes y viejos, trabajando, leyendo en la biblioteca, recorriendo nerviosos los pasillos, en una animada conversación... Tenías la sensación de que nunca debías abandonar el lugar (y parecía que alguna gente nunca lo había hecho).

El departamento era bastante pequeño en comparación con otras facultades. Poseía no más de quince profesores permanentes y una decena de posdoctorados en puestos de tres años. Cuando yo llegué, la facultad contaba con algunos de los más grandes matemáticos de nuestro tiempo, como Joseph Bernstein, Raoul Bott, Dick Gross, Heisuke Hironaka, David Kazhdan, Barry Mazur, John Tate y Shing-Tung Yau. Conocerlos y aprender de ellos era una oportunidad única en la vida. Tengo grandes recuerdos del carismático Raoul Bott, un amistoso gigante de cabello gris, en aquella época con sesenta y muchos años, tirando de mí por el pasillo y preguntando, con una voz atronadora:

[xxiii] Se refiere a la escultura de Daniel Chester French (1884) en honor de uno de los fundadores de la prestigiosa universidad, John Harvard (1607-1638). Dado que el escultor no contaba con un retrato fidedigno del homenajeado, empleó las facciones de un descendiente colateral suyo como modelo. (*N. del t.*).

—¿Cómo va todo, jovencito?

También había una treintena de licenciados, todos ellos con diminutos cubículos en el piso intermedio.

Todo el mundo dio una calurosa bienvenida a los tres rusos (Kolya, Borya y yo). Aunque éramos sólo el comienzo de una marea de científicos rusos que tomarían por asalto las universidades estadounidenses en los años siguientes, por aquella época era todavía muy inusual tener visitantes de la Unión Soviética. Aun así, tras una semana, más o menos, por Cambridge, sentía que ya me había adaptado al entorno. Todo parecía tan natural y relajado… Me compré los tejanos más a la moda y un *Walkman* Sony (¡recuerde, era 1989!) y caminaba por la ciudad con los auriculares puestos, escuchando las canciones más geniales. Para un extranjero debía parecer el típico estudiante de veintitantos. Mi inglés cotidiano aún dejaba mucho que desear. Para mejorarlo compraba cada día el *New York Times* y lo leía, con un diccionario, durante al menos una hora (descifrando algunas de las palabras más extrañas y antiguas del idioma inglés, como supe después). También me volví adicto a la televisión nocturna.

El *show* de David Letterman (que comenzaba a las 00.35 en la NBC) era mi favorito. La primera vez que lo vi no pude entender ni una sola palabra. Pero de alguna manera tenía claro que era mi programa, que si comprendiera lo que decía el presentador lo disfrutaría. Esto me proporcionó una motivación extra. Lo veía tercamente noche tras noche y poco a poco comencé a comprender las bromas, el contexto, el fondo. Fue mi manera de descubrir la cultura pop estadounidense, y devoraba toda migaja de ella que encontrase. Las noches en que tenía que irme a dormir pronto, grababa en vídeo el programa y lo veía por la mañana mientras desayunaba. El *show* de Letterman se convirtió en una especie de ritual religioso para mí.

Aunque ni los demás becados ni yo teníamos ninguna obligación formal, acudíamos cada día al departamento a trabajar en nuestros proyectos, hablar con gente y acudir a seminarios, de los que había muchos. Los dos profesores

con los que más hablaba eran dos expatriados rusos: Joseph Bernstein y David Kazhdan. Ambos son matemáticos extraordinarios, antiguos alumnos de Gelfand y buenos amigos entre sí, pero es imposible encontrar temperamentos más dispares.

Joseph es cálido y acogedor. Cuando yo le hacía una pregunta, escuchaba atentamente, se tomaba su tiempo para responder y a menudo decía que no sabía la respuesta, pero aun así te contaba lo que sabía sobre el tema. Sus explicaciones eran claras y sencillas, y a menudo contenían la respuesta que había asegurado no conocer. Siempre te hacía sentir que no era necesario ser un genio para comprender todo aquello, algo fantástico para un joven que aspiraba a ser matemático.

David, en cambio, es un volcán: extremadamente agudo, ocurrente, rápido. Por su enciclopédico conocimiento, la exhibición que hace de él y sus ocasionales muestras de impaciencia, recuerda a su profesor Gelfand. En los seminarios, si creía que el conferenciante no estaba explicando bien el tema, simplemente se subía al encerado, cogía la tiza del conferenciante por la fuerza y tomaba el relevo. Esto, si el tema le interesaba. Si no, sencillamente se dormía. Era muy infrecuente oírle decir «no lo sé» en respuesta a una pregunta: realmente sabe muchísimo acerca de todo. He pasado muchas horas hablando con él a lo largo de los años y he aprendido un montón. Posteriormente colaboramos en un proyecto conjunto que resultó ser una experiencia enriquecedora.

En mi segunda semana en Harvard tuve otro encuentro trascendental. Además de Harvard, en Cambridge hay otra universidad menor, menos conocida, a la que se suele nombrar por sus siglas… MIT (¡es broma, claro!). Siempre ha habido cierta rivalidad entre Harvard y el MIT, pero en realidad los dos departamentos de matemáticas están íntimamente relacionados. No es raro, por poner un ejemplo, que un estudiante de Harvard tenga a un profesor del MIT como asesor, o viceversa. A menudo los estudiantes de una universidad van a clases de la otra.

Habían nombrado a Sasha Beilinson, amigo de Borya Feigin y coautor con él, profesor en el MIT, y yo asistía a las clases que daba allí. En la primera clase, alguien me señaló a un elegante hombre de cuarenta y tantos años sentado a un par de filas de distancia.

—Ese es Victor Kac.

¡Cielos! Era el creador de las álgebras Kac-Moody y muchas otras cosas, cuya obra había estado estudiando durante varios años.

Tras la clase nos presentaron. Victor me saludó con calidez y me dijo que quería saber más de mi trabajo. Sentí escalofríos cuando me invitó a hablar en su seminario. Acabé dando tres conferencias en su seminario, en tres viernes consecutivos. Fueron mis primeras conferencias en inglés, y creo que hice un trabajo decente: la asistencia fue alta, la audiencia parecía interesada e hicieron muchas preguntas.

Victor me tomó bajo su ala protectora. A menudo nos encontrábamos en su espacioso despacho del MIT, hablábamos de matemáticas y me invitaba a su casa a cenar. Posteriormente trabajamos juntos en varios proyectos.

Aproximadamente un mes después de mi llegada, también Borya Feigin vino a Cambridge. Sasha Beilinson le envió una invitación para visitar el MIT durante dos semanas. Me sentí feliz de que Borya viniese a Cambridge: era mi profesor, y éramos muy amigos. Teníamos también un buen número de proyectos matemáticos en marcha, y era una gran oportunidad para trabajar en ellos. No me di cuenta, al principio, de que su visita iba a arrojar mi vida a tremendas turbulencias.

La noticia de que la puerta a Occidente estaba abierta, y que los matemáticos podían viajar libremente y visitar universidades de Estados Unidos y del resto del mundo se extendió rápidamente entre la comunidad matemática de Moscú. Muchos decidieron aprovechar la oportunidad y emigrar definitivamente a América. Comenzaron enviando solicitudes a varias universidades y llamando a sus colegas en Estados Unidos para decirles que buscaban trabajo. Dado que nadie sabía cuánto duraría esta «apertura» (la mayoría imaginaba que tras

unos meses las fronteras se cerrarían nuevamente), hubo una especie de frenesí en Moscú. Todas las conversaciones llevaban a la misma pregunta: «¿Cuál es la mejor manera de salir?».

Y ¿por qué iba a ser de otro modo? La mayoría de aquella gente había tenido que enfrentarse con el antisemitismo y con varios otros obstáculos en la Unión Soviética. No encontraban empleo en el mundo académico y tenían que realizar su labor matemática aparte. Y aunque la comunidad matemática de Moscú era muy fuerte, estaba en gran parte aislada del resto del mundo. Había grandes oportunidades de carrera profesional en Occidente que sencillamente no existían en la Unión Soviética. ¿Cómo podía nadie esperar que esta gente fuera leal al país que los rechazaba e incluso intentaba evitar que trabajasen en el campo que amaban, cuando se presentaban oportunidades de una vida mejor en el extranjero?

Cuando llegó a Estados Unidos, Borya Feigin se dio cuenta de que se avecinaba una «fuga de cerebros», y de que nada podría detenerla. En Rusia, la economía se hacía pedazos, había escasez de alimentos en todas partes y la situación política era cada día más inestable. En América había un nivel de vida mucho más alto, abundancia de todo, y ¡la vida en el mundo académico parecía tan cómoda! El contraste era inmenso. ¿Cómo convencer a nadie de regresar a la Unión Soviética tras experimentar todo esto en persona? El éxodo de una abrumadora mayoría de los mejores matemáticos de Rusia (o de todo aquel, en realidad, que pudiera hallar un empleo) parecía inevitable, e iba a ocurrir muy rápidamente.

Sin embargo, Borya decidió regresar a Moscú, pese a haber luchado toda su vida contra el antisemitismo y pese a no hacerse ilusiones con respecto a la situación en la Unión Soviética. La Universidad de Moscú lo había aceptado como estudiante (en 1969, cuando presentó la solicitud, aún aceptaba a algunos estudiantes judíos), pero no le permitió entrar en el programa de doctorado. Tuvo que alistarse en la universidad de la provinciana ciudad de Yaroslavl para doctorarse. Tuvo grandes dificultades para hallar un empleo

hasta que consiguió hacerse con un puesto en el Instituto de Física de Estado Sólido. Aun así, a Borya esta huida a la carrera le resultaba perturbadora. Creía que era moralmente incorrecto abandonar Rusia *en masse* de esta manera en un momento de grandes dificultades, como ratas que abandonan un barco que se hunde.

A Borya le entristecía profundamente saber que pronto la Gran Escuela Matemática de Moscú dejaría de existir. Aquella tupida red de matemáticos en la que había vivido durante tantos años iba a evaporarse ante sus ojos. Sabía que pronto estaría prácticamente sólo en Moscú, privado del mayor placer de su vida: trabajar en matemáticas con sus amigos y colegas.

Obviamente, este se convirtió en el principal tema de mis conversaciones con Borya. Él intentaba convencerme de que yo regresara y no sucumbiera a lo que él denominaba «histeria de masas» que se había apoderado de los que querían huir a Occidente. También le preocupaba que yo no fuera capaz de convertirme en un buen matemático en la «sociedad de consumo» estadounidense: pensaba que era capaz de matar la motivación personal y la ética de trabajo.

—Mira, tú tienes talento —me decía—, pero necesita desarrollarse más. Tienes que trabajar duro, como hacías en Moscú. Sólo entonces podrás conocer tu potencial. Aquí en América, eso es imposible. Hay demasiadas distracciones y tentaciones. Aquí la vida sólo es diversión, disfrute, gratificación instantánea. ¿Cómo puedes concentrarte en tu trabajo aquí?

Yo no compartía sus argumentos; al menos, no del todo. Sabía que poseía una gran motivación para las matemáticas. Pero sólo tenía veintiún años, y Borya, quince años mayor, era mi mentor. Yo le debía todo lo que había conseguido como matemático. Sus palabras me hacían reflexionar. ¿Y si tenía razón?

La invitación a Harvard fue un punto de inflexión en mi vida. Cinco años antes me habían suspendido en el examen de ingreso a la MGU, y parecía que mi sueño de convertirme en matemático había sido definitivamente destrozado. Venir a Harvard era mi vindicación, una recompensa por todo el duro trabajo realizado en Moscú durante aquellos años. Pero quería seguir en movimiento,

efectuar nuevos descubrimientos. Quería ser el mejor matemático posible. Veía la invitación a Harvard como tan sólo una fase en un viaje mucho más largo. Era un adelanto: Arthur Jaffe y otros creían en mí, y no podía defraudarlos.

En Cambridge tuve la suerte de contar con el apoyo de maravillosos matemáticos como Victor Kac, quien me animó y me ayudó en todo lo que le fue posible. Pero también sentía los celos por parte de algunos de mis colegas. ¿Por qué le dan tanto y tan pronto a este sujeto? ¿Qué ha hecho para merecerlo? Me sentía obligado a cumplir mi promesa, a demostrar a todo el mundo que mis primeros trabajos matemáticos no eran cuestión de suerte, que podía hacer cosas más grandes y más importantes en el mundo de las matemáticas.

Los matemáticos formamos una pequeña comunidad y, como todos los humanos, hay cotilleos acerca de cuánto vale cada uno. En mi corta estancia en Harvard ya había oído suficientes historias acerca de prodigios que se habían quemado antes de tiempo. Había oído despiadados comentarios acerca de ellos, cosas como «¿te acuerdas de tal y tal? Sus primeros trabajos fueron tan buenos... Pero no ha hecho nada ni remotamente tan importante en los últimos tres años. ¡Qué pena!».

Me aterraba la posibilidad de que en tres años dijeran eso de mí, de modo que me sentía constantemente presionado para ser productivo y tener éxito.

Entre tanto, la situación económica en la Unión Soviética se deterioraba a gran velocidad, y las perspectivas eran muy inciertas. Viendo todo esto desde dentro, y convencidos de que yo no tendría ningún futuro allí, mis padres comenzaron a llamarme regularmente urgiéndome a que *no* regresara. En aquellos días era muy caro y difícil llamar a Estados Unidos desde la Unión Soviética. Mis padres temían que su teléfono estuviera intervenido, de modo que viajaban a la central de correos de Moscú y llamaban desde allí. Un viaje así les llevaba casi todo el día. Pero estaban decididos, pese a que me extrañaban de un modo terrible, a hacer todo lo que estuviese en su poder para

convencerme de quedarme en América. Estaban completamente seguros de que era lo mejor para mí.

También Borya quería lo que era mejor para mí, pero su postura se debía en parte a una creencia moral. Iba a contracorriente, y lo admiro por eso. Pero también tengo que admitir que podía hacerlo gracias a su situación, relativamente desahogada, en Moscú (aunque eso pronto cambiaría, y se vería obligado a pasar unos cuantos meses al año en el extranjero, sobre todo en Japón, para mantener a su familia). Mi situación era completamente diferente: no tenía dónde quedarme en Moscú, y tan sólo un *propiska* (derecho a vivir allí) temporal. Aunque Yakov Isaévich me había conseguido un empleo de ayudante en Kerosinka, el salario era escaso y apenas me llegaría para pagar una habitación en Moscú. Debido al antisemitismo, ingresar en una facultad para el doctorado sería una batalla titánica, y mis perspectivas de empleo posteriores eran incluso peores.

A finales de noviembre, Arthur Jaffe me llamó a su despacho y me ofreció la posibilidad de extender mi estancia en Harvard hasta finales de mayo. Tenía que tomar una decisión pronto, y estaba desgarrado por dentro. Me gustaba mi estilo de vida en Boston. Sentía que era donde debía estar. Con Harvard y el MIT, Cambridge era uno de los más importantes centros matemáticos. Algunas de las mentes más brillantes del mundo estaban aquí, y yo podía simplemente llamar a sus puertas, preguntarles algo y aprender de ellos. Había también abundantes seminarios en los que se anunciaban fascinantes nuevos descubrimientos poco después de que se hicieran. Estaba rodeado de los estudiantes más inteligentes. Se trataba del entorno más estimulante para un joven aspirante a matemático que nadie pudiera imaginar. Moscú solía ser así, pero ya no.

Pero era la primera vez que estaba tanto tiempo lejos de casa. Extrañaba a mi familia y a mis amigos. Y Borya, mi maestro, que era la persona más cercana a mí en Cambridge, se obstinaba en que yo debía regresar en diciembre, conforme a lo planeado.

Todas las mañanas me despertaba aterrorizado, preguntándome: «¿qué debo hacer?». Desde la perspectiva del tiempo pasado, la respuesta parece evidente. Pero con tantas fuerzas diferentes colisionando, todas al unísono, tomar una decisión no era fácil. Al final, tras angustiosas deliberaciones, decidí seguir el consejo de mis padres y quedarme, y así se lo comuniqué a Jaffe. Mis amigos Reshetikhin y Tsygan hicieron lo mismo.

A Borya no le gustó esto, y yo sentía que le había defraudado. Verlo marcharse de regreso a Moscú, en el aeropuerto de Logan, a mediados de diciembre, fue un momento de tristeza. No sabíamos qué nos deparaba el futuro a ninguno de los dos; ni siquiera sabíamos si volveríamos a vernos pronto. Yo había hecho caso omiso al consejo de Borya. Pero todavía me atemorizaba que sus miedos se hicieran realidad.

Capítulo 14
Atando los haces de la sabiduría

El semestre de primavera trajo más visitantes a Harvard, uno de los cuales, Vladimir Drinfeld, cambió la dirección de mi investigación y, en más de un modo, mi carrera matemática. Y todo eso sucedió gracias al Programa Langlands.

Yo había oído hablar de Drinfeld con anterioridad. En aquella época sólo tenía treinta y seis años, pero era ya una leyenda. Seis meses después de conocerle, le concedieron la Medalla Fields, uno de los más prestigiosos premios en matemáticas, al que muchos comparan con el premio Nobel.

Drinfeld publicó su primer artículo matemático con sólo diecisiete años, y para cuando cumplía los veinte estaba ya realizando descubrimientos revolucionarios en el marco del Programa Langlands. Originario de Járkov, Ucrania, donde su padre era un célebre profesor de matemáticas, Drinfeld estudió en la Universidad de Moscú a principios de la década de 1970. Por aquella época a los judíos les costaba entrar en la MGU, pero se admitía un pequeño porcentaje de judíos. Para cuando recibía su licenciatura de la MGU, era ya famoso en todo el mundo y lo aceptaron en el doctorado, algo extraordinario para un estudiante judío. Su tutor era Yuri Ivánovich Manin, uno de los matemáticos más originales e influyentes del mundo.

Sin embargo, ni siquiera Drinfeld consiguió escapar del todo del antisemitismo. Tras obtener su doctorado, fue incapaz de conseguir un empleo en Moscú y tuvo que pasar tres años en una universidad de provincias, en Ufa, una ciudad industrial en los montes Urales. Drinfeld se trasladó a Ufa a desgana, y no era la menor de las razones el que no había, en la ciudad, matemáticos que trabajaran en las áreas que a él le interesaban. Pero el resultado de su estancia en Ufa fue que Drinfeld escribió una importante obra en el campo de la teoría de sistemas integrables, un tema bastante alejado de sus intereses, conjuntamente con un matemático local llamado Vladímir Sokolov. A los

sistemas integrables que crearon se les denomina, hoy en día, sistemas Drinfeld-Sokolov.

Al cabo de tres años en Ufa, Drinfeld consiguió hacerse, finalmente, con un empleo en su ciudad natal, en el Instituto Járkov para Física de Bajas Temperaturas. Se trataba de un empleo relativamente cómodo, y podía estar cerca de su familia, pero al estar en Járkov quedaba aislado de la comunidad matemática soviética, que se concentraba en Moscú y, en menor medida, en San Petersburgo.

Pese a todo ello, y a trabajar en gran parte solo, Drinfeld siguió obteniendo maravillosos resultados en diversas áreas de las matemáticas y la física. Además de demostrar importantes conjeturas del Programa Langlands, y de abrir un nuevo capítulo en la teoría de sistemas integrables con Sokolov, desarrolló la teoría general de grupos cuánticos (originalmente descubierta por Kolya Reshetikhin y sus coautores) y muchas otras cosas. La amplitud de sus contribuciones mareaba.

Se hicieron intentos, en Moscú, de contratar a Drinfeld. Me contaron, por ejemplo, que el físico Alexander Belavin intentó llevarlo al Instituto Landau de Física Teórica, cerca de Moscú. Para aumentar las probabilidades de éxito, Belavin y Drinfeld resolvieron juntos un importante problema de clasificación de soluciones a la «ecuación Yang-Baxter clásica», en la que muchos físicos se interesaban por aquel entonces. Su artículo se publicó en la revista de Gelfand, *Análisis funcional y aplicaciones*, con mucho éxito. Creo que es el artículo más largo jamás publicado por Gelfand, lo que dice mucho de su importancia. Fue esa obra la que llevó a Drinfeld a la teoría de grupos cuánticos, que revolucionó muchas áreas de las matemáticas. Sin embargo, ninguno de esos planes de contratación funcionó. El antisemitismo y la carencia de *propiska* en Moscú por parte de Drinfeld eran una combinación letal. Drinfeld permaneció en Járkov, visitando Moscú sólo ocasionalmente.

Se invitó a Drinfeld a visitar Harvard en 1990, y esto fue una afortunada casualidad para mí. Llegó a finales de enero. Tras haber oído todas aquellas

leyendas acerca de él, me sentí intimidado al principio, pero resultó ser extremadamente agradable y amistoso. Hablaba bajo, escogía cuidadosamente sus palabras y, cuando hablaba de matemáticas, era el ejemplo vivo de la claridad. Cuando te explicaba algo, no intentaba hacerlo para agrandar su figura, como si estuviera desvelando un gran misterio que nunca hubieras sido capaz de comprender por ti solo (que es, lamentablemente, como suelen explicarse algunos colegas a los que no nombraré). Por el contrario, siempre conseguía explicar las cosas de la manera más sencilla y clara posible, de modo que una vez te las había explicado te sentías como si siempre las hubieras sabido.



Más importante aún; Drinfeld me dijo desde el principio que estaba muy interesado en mi trabajo con Feigin, y que deseaba emplearlo para su nuevo proyecto, relacionado con el Programa Langlands.

Recordemos, del capítulo 9, las tres columnas de la piedra Rosetta de André

Weil:

Teoría de números	*Curvas sobre cuerpos finitos*	*Superficies de Riemann*

El Programa Langlands surgió inicialmente con las columnas izquierda y central: teoría de números y curvas sobre cuerpos finitos. La idea es establecer una relación entre las representaciones de un grupo de Galois y las funciones automorfas. El concepto de grupo de Galois tiene todo el sentido del mundo en las columnas izquierda y central de la piedra Rosetta, y hay funciones automorfas adecuadas que se pueden encontrar en otra área de las matemáticas llamada análisis armónico.

Con anterioridad a la obra de Drinfeld, no se sabía si había algún análogo del Programa Langlands para la columna de la derecha, la teoría de superficies de Riemann. Las maneras de incluir las superficies de Riemann comenzaron a surgir a principios de la década de 1980 en la obra de Drinfeld, a la que siguió la del matemático francés Gérard Laumon. Se dieron cuenta de que era posible efectuar una reformulación geométrica del Programa Langlands que tuviera sentido tanto para la columna central como para la de la derecha de la piedra Rosetta de André Weil.

En las columnas izquierda y central, el Programa Langlands relaciona los grupos de Galois y las funciones automorfas. La cuestión es, entonces, hallar los análogos adecuados del grupo de Galois y de las funciones automorfas en la teoría geométrica de superficies de Riemann. Ya hemos visto en el capítulo 9 que, en teoría geométrica, el grupo fundamental de una superficie de Riemann desempeña el papel de grupo de Galois. Pero dejamos sin explorar los análogos geométricos de las funciones automorfas.

Resulta que los análogos geométricos perfectos no son funciones, sino lo que los matemáticos llaman *haces*.

Para explicar lo que son, hablemos de números. Tenemos los números naturales: 1, 2, 3... y, evidentemente, sirven para muchas cosas. Una de ellas es medir dimensiones. Como vimos en el capítulo 10, una recta es unidimensional, un plano es bidimensional y para cualquier número *n* natural tenemos un espacio plano *n*-dimensional, también llamado espacio vectorial.[121] Imaginemos ahora un mundo en el que los números naturales se vieran sustituidos por espacios vectoriales, es decir: en lugar del número 1 tuviéramos una recta; en lugar del número 2, un plano; etcétera.

En este nuevo mundo, la suma de números se vería sustituida por lo que los matemáticos llaman la suma directa de espacios vectoriales. Dados dos espacios vectoriales, cada uno con su sistema de coordenadas, obtenemos un tercero, que combina las coordenadas de los dos espacios vectoriales, de modo que su dimensión es la suma de dos dimensiones. Por ejemplo: una recta tiene una coordenada y un plano tiene dos. Al sumarlos obtenemos un espacio vectorial con tres coordenadas. Se trata de nuestro espacio tridimensional.

La multiplicación de números naturales se ve sustituida por otra operación con espacios vectoriales. Dados dos espacios vectoriales, obtenemos un tercero, llamado su producto tensorial. No daré ahora una descripción detallada de lo que es un producto tensorial: lo importante es que si los dos espacios vectoriales con los que comenzamos tienen dimensiones *m* y *n*, su producto tensorial tendrá dimensión $m \cdot n$.

Así, tenemos operaciones en espacios vectoriales análogas a las operaciones de suma y multiplicación con números naturales. ¡Pero este mundo paralelo de espacios vectoriales es mucho más rico que el mundo de los números naturales! Un número dado cualquiera no tiene estructura interna. El número 3, por ejemplo, por sí mismo carece de simetrías. Pero un espacio tridimensional sí las posee. En realidad, hemos visto que cualquier elemento del grupo de Lie SO(3) da lugar a una rotación del espacio tridimensional. El número 3 es una mera sombra del espacio tridimensional, que refleja tan sólo un atributo del mismo, su dimensionalidad. Pero no hace justicia a otros

aspectos de los espacios vectoriales como sus simetrías.

En matemáticas modernas, creamos un nuevo mundo en el que los números cobran vida en forma de espacios vectoriales. Cada uno de ellos tiene una vida rica y plena, y tienen también relaciones más profundas con los demás, que no se reducen a la mera suma y multiplicación. En efecto, sólo podemos restar 1 a 2 de un amanera determinada. Pero podemos inscribir una recta en un plano de muchas formas diferentes.

A diferencia de los números naturales, que forman un conjunto, los espacios vectoriales forman una estructura más sofisticada, que los matemáticos llaman categoría. Una categoría determinada tiene «objetos», como los espacios vectoriales, pero además tiene «morfismos» de un objeto cualquiera a otro objeto cualquiera.[122] Por ejemplo, los morfismos desde un objeto a sí mismo en una categoría dada son esencialmente las simetrías de ese objeto permitidas en esta categoría. Por tanto, el lenguaje de las categorías nos permite centrarnos no en qué consisten los objetos, sino en cómo interactúan entre sí. Por ello la teoría matemática de categorías se adapta especialmente bien a la informática.[123] La creación de lenguajes de programación funcionales, como Haskell, es tan sólo un ejemplo de una miríada de recientes aplicaciones.[124] Parece inevitable que las próximas generaciones de ordenadores estén basadas más en la teoría de categorías que en la de conjuntos, y que las categorías entren en nuestra vida cotidiana, nos demos cuenta o no.

El cambio de paradigma de conjuntos a categorías es también una de las fuerzas motrices de las matemáticas modernas. Se le llama *categorificación*. Básicamente estamos creando un nuevo mundo, en el que elevamos a un nivel mucho más alto los conceptos conocidos. Por ejemplo, los espacios vectoriales sustituyen a los números. La siguiente pregunta es: ¿qué pasará con las funciones en este nuevo mundo?

Para responder a esta pregunta, volvamos por un momento a la noción de función. Supongamos que tenemos una forma geométrica, como una esfera o

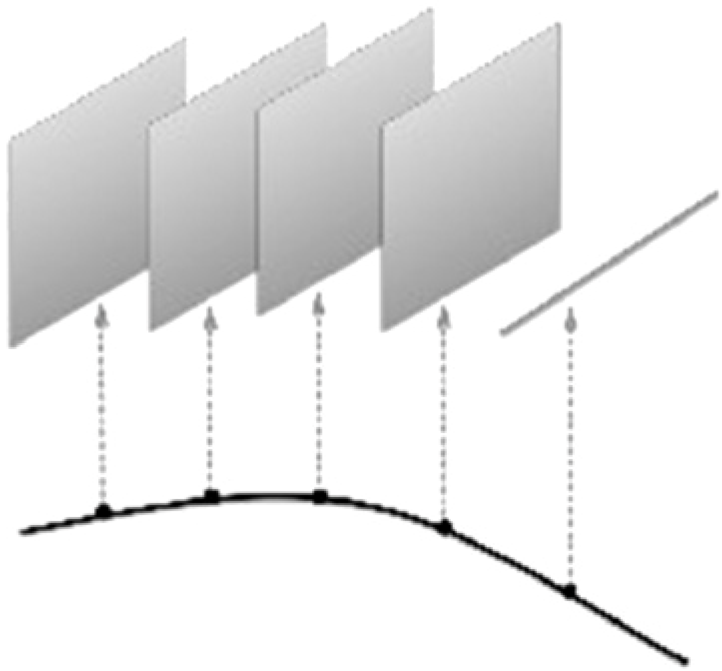
un círculo, o la superficie de un donut. Llamémosla *S*. Como ya vimos antes, los matemáticos nos referimos a estas formas como variedades. Una función *f* en una variedad *S* es una regla que asigna un número a cada punto *s* en *S*, llamado valor de la función *f* en el punto *s*. La indicamos como *f* (*s*).

Un ejemplo de función es la temperatura, en que la variedad *S* es sencillamente el espacio tridimensional en que vivimos. En cada punto de *S* podemos medir la temperatura, que es un número. Esto nos proporciona una regla que asigna un número a cada punto, de modo que tenemos una función. De igual manera, la presión barométrica nos da también una función.

Para ver un ejemplo más abstracto, hagamos que *S* sea la circunferencia. Cada punto de la circunferencia está determinado por un ángulo, al que, como antes, llamaremos φ. Que *f* sea la función seno. En tal caso, el valor de esta función en el punto de la circunferencia correspondiente al ángulo φ es sen(φ). Por ejemplo, si φ = 30º (o π/6, si medimos los ángulos en radianes en lugar de en grados) el valor de la función seno es 1/2. Si φ = 60º (o π/3), el valor será $\sqrt{3}/2$, etcétera.

Sustituyamos ahora los números por espacios vectoriales. De esta manera una función se convertirá en una regla que asigna a cada punto *s* en una variedad *S* no un número, sino un espacio vectorial. A esa regla se le llama *haz*. Si indicamos un haz mediante un símbolo *F*, el espacio vectorial asociado a un punto *s* se indicará con el símbolo *F*(*s*).

Así, la diferencia entre funciones y haces reside en lo que asignamos a cada punto de nuestra variedad *S*: para las funciones, asignamos números a puntos, y para los haces, asignamos espacios vectoriales. Para un haz dado, estos espacios vectoriales pueden ser de diferentes dimensiones para diferentes puntos *s*. Por ejemplo, en la imagen inferior, la mayoría de estos espacios vectoriales son planos (es decir, espacios vectoriales bidimensionales) pero hay uno que es una recta (un espacio vectorial unidimensional). Los haces son categorificaciones de funciones, del mismo modo en que los espacios vectoriales son categorificaciones de números.



Aunque esto va más allá del alcance de este libro, en realidad un haz es más que una recolección desarticulada de espacios vectoriales asignados a puntos de una variedad. Las fibras de un haz, en diferentes puntos, tienen que estar relacionadas entre sí mediante un estricto conjunto de reglas.[125]

De momento, lo que nos importa es que existe una profunda analogía entre funciones y haces, descubierta por el gran matemático francés Alexander Grothendieck.

La influencia de Grothendieck en las matemáticas modernas no tiene casi parangón. Si pregunta cuál es el matemático más importante de la segunda mitad del siglo XX, muchos matemáticos le responderán, sin dudar un instante: Grothendieck. No sólo creó, en solitario, la moderna geometría algebraica, sino que transformó completamente la manera en que vemos las matemáticas. El diccionario entre funciones y haces, que empleamos en la reformulación del Programa Langlands, es un excelente ejemplo del conocimiento profundo típico del trabajo de Grothendieck.

Para darle una pincelada de la idea de Grothendieck, recordemos, del capítulo 8, la noción de cuerpo finito. Para cada número primo *p*, existe un cuerpo finito con *p* elementos: {0, 1, 2..., *p* - 1}. Como ya dijimos, estos *p* elementos comprenden un sistema numérico con operaciones de suma, resta, multiplicación y división módulo *p*, que obedecen las mismas reglas que las operaciones correspondientes con números racionales y reales.

Pero en este sistema numérico hay también algo especial. Si toma cualquier elemento del cuerpo finito {0, 1, 2..., *p* - 1} y lo eleva a la *p*-ésima potencia, en el sentido de la aritmética de módulo *p* del que hablamos anteriormente... ¡obtendrá el mismo número! En otras palabras,

$$a^p = a \text{ módulo } p.$$

Esta fórmula la demostró Pierre Fermat, el matemático del último teorema de Fermat. Sin embargo, a diferencia de la de aquel, la demostración de esta fórmula es bastante sencilla. Cabría incluso en los márgenes de un libro. La he puesto en la parte final de este.[126] Para distinguir este resultado del último teorema de Fermat (a veces también llamado gran teorema de Fermat) se le llama «pequeño teorema de Fermat».

Por ejemplo, sea $p = 5$. Nuestro cuerpo finito será, pues, {0,1,2,3,4}. Elevemos cada uno de ellos a la 5.ª potencia. Evidentemente, con 0 toda potencia es 0, y con 1 toda potencia es 1: aquí no hay sorpresas. Ahora, elevemos 2 a la 5.ª potencia: obtenemos 32. Pero $32 = 2 + 5 \cdot 6$, de modo que módulo 5 da 2: volvemos al 2, como prometimos. Tomemos por ejemplo la 5.ª potencia de 3: obtenemos 243, pero $243 = 3 + 5 \cdot 48$, que es 3 módulo 5. Nuevamente, obtenemos el número con el que comenzamos. Finalmente, intentemos lo mismo con 4: su 5.ª potencia es 1.024, que es 4 módulo 5. ¡Bingo! Le animo a comprobar que $a^3 = a$ módulo 3, y que $a^7 = a$ módulo 7 (para números primos más altos puede que necesite una calculadora si quiere verificar el pequeño teorema de Fermat).

Lo que también es notable es que una ecuación similar forma la base del algoritmo de encriptación RSA, empleado a escala mundial en banca *online*. [127]
La fórmula $a^p = a$ módulo p es más que un bonito descubrimiento: significa que la operación de elevar números ala$p$-ésima potencia, convirtiendo a en a^p, es un elemento del grupo de Galois del cuerpo finito. Se le llama simetría Frobenius, o simplemente la *Frobenius*. Resulta que el grupo de Galois del cuerpo finito de p elementos se genera mediante esta Frobenius. [128]
Regresemos a la idea de Grothendieck. Comenzamos en la columna central de la piedra Rosetta de Weil. Luego estudiamos curvas sobre cuerpos finitos y variedades más generales sobre cuerpos finitos. Estas variedades están definidas por sistemas de ecuaciones polinómicas como

$$y^2 + y = x^3 - x^2,$$

de las que ya hablamos en el capítulo 9.
Supongamos que tenemos un haz en una de estas variedades. Es una regla que asigna a cada punto de la variedad un espacio vectorial, pero en realidad hay más estructura. La noción de haz se define de tal manera que cualquier simetría del sistema numérico sobre el que definamos nuestra variedad (que, en este caso, es un cuerpo finito) da lugar a una simetría en su espacio vectorial. En especial, la Frobenius, que es un elemento del grupo de Galois del cuerpo finito, da lugar necesariamente a una simetría (como una rotación o una dilatación) de este espacio vectorial.
Ahora bien, si tenemos una simetría de un espacio vectorial, podemos obtener un número de ella. Existe una técnica estándar para hacer esto. Por ejemplo, si nuestro espacio vectorial es una recta, la simetría de este espacio vectorial que obtendremos de la Frobenius será una dilatación: todo elemento z se transformará en Az para un número A. Por tanto, el número que asignamos a esta simetría es justamente A. Y para los espacios vectoriales de dimensión mayor a 1, tomamos lo que se denomina traza de la simetría. [129] Al tomar la

traza de la Frobenius en el espacio *F* (*s*), asignamos un número al punto *s*.

El caso más sencillo es que la Frobenius actúe como la simetría identidad en el espacio vectorial. De modo que en este caso, al tomar la traza de la Frobenius, asignamos a un espacio vectorial su dimensión. Pero si la Frobenius no es la identidad, esta construcción asigna al espacio vectorial un número más general, no necesariamente un número natural.

El resultado es que si tenemos una variedad *S* sobre un cuerpo finito {0, 1, 2..., *p* - 1} (que es lo que ocurre si nos encontramos en la columna central de la piedra Rosetta de Weil) y tenemos un haz *F* sobre *S*, entonces podemos asignar un número a cada punto *s* de *S*. Esto nos da una función de *S*. Por lo tanto, vemos que en la columna central de la piedra Rosetta de Weil tenemos una manera de pasar de haces a funciones.

Grothendieck llamó a esto «diccionario haces–funciones». Se trata, sin embargo, de un diccionario curioso: basándonos en el procedimiento que hemos visto, obtenemos un pasaje de haces a funciones. Es más: las operaciones naturales sobre haces son paralelas a las operaciones naturales sobre funciones. Por ejemplo, la operación de tomar la suma directa de dos haces, definida de modo similar a la suma directa de dos espacios vectoriales, es paralela a la operación de suma de dos funciones.

Pero no hay manera natural de pasar de funciones a haces. [130] Resulta que podemos hacerlo sólo para determinadas funciones, no para todas. Pero si pudiéramos hacerlo, este haz llevará un montón de información adicional que la función no tenía. Esta información puede emplearse, luego, para llegar al corazón mismo de la función. Un hecho notable es que la mayoría de las funciones que aparecen en el Programa Langlands, en la segunda columna de la piedra Rosetta de Weil, proceden de haces.

Los matemáticos han estudiado las funciones, uno de los conceptos centrales de todas las matemáticas, durante siglos. Es una noción que podemos comprender de modo intuitivo si pensamos en la temperatura o en la presión atmosférica. Pero de lo que la gente no se daba cuenta antes de Grothendieck

es que si estamos en el contexto de variedades sobre cuerpos finitos (como curvas sobre un cuerpo finito) podemos ir más allá de las funciones y, en su lugar, trabajar con haces.

Las funciones eran, si se quiere, conceptos de las matemáticas arcaicas, y los haces son los conceptos de las matemáticas modernas. Grothendieck demostró que, en muchos sentidos, los haces son más fundamentales; las buenas viejas funciones eran tan sólo sus sombras.

Este descubrimiento estimuló enormemente el progreso en las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. La razón es que los haces son objetos mucho más vitales y versátiles, con mucha más estructura. Por ejemplo, un haz puede tener simetrías. Si elevamos una función a haz, podemos aprovechar esas simetrías y de esta manera aprender mucho más que lo que aprenderíamos empleando sólo funciones.

Lo realmente importante para nosotros es que los haces tienen sentido tanto en la columna central como en la de la derecha de la piedra Rosetta de Weil. Esto abre una puerta a mover el Programa Langlands de la columna central a la derecha.

En la columna derecha de la piedra Rosetta tenemos variedades definidas sobre los números complejos. Tenemos, por ejemplo, superficies de Riemann como la esfera o la superficie del donut. En este entorno, las funciones automorfas que aparecen en las columnas izquierda y central de la piedra Rosetta de Weil no tienen mucho sentido. Pero los haces, sí. De modo que una vez sustituimos las funciones por haces en la columna central (y podemos hacerlo, gracias al diccionario de Grothendieck) volvemos a obtener la analogía entre las columnas central y derecha de la piedra Rosetta.

Resumamos: cuando pasamos de la columna central de la piedra Rosetta de Weil a la de la derecha, hemos de efectuar ajustes en ambos lados de la relación concebida por el Programa Langlands. Esto se debe a que los conceptos de grupo de Galois y función automorfa no tienen contrapartidas directas en la geometría de las superficies de Riemann. Primero, el grupo de

Galois halla su análogo en el grupo fundamental de la superficie de Riemann, como explicamos en el capítulo 9. Después, empleamos el diccionario de Grothendieck y en lugar de funciones automorfas empleamos haces que satisfacen propiedades análogas a las de las funciones automorfas. Los llamamos haces automorfos.

El siguiente diagrama ilustra esto. En él tenemos tres columnas de la piedra Rosetta, y las dos hileras de cada columna contienen los nombres de los objetos en los dos lados de la relación Langlands específica a esa columna.

Teoría de números	*Curvas sobre cuerpos finitos*	*Superficies de Riemann*
grupo de Galois	grupo de Galois	grupo fundamental
funciones automorfas	funciones automorfas o haces automorfos	haces automorfos

La pregunta es, entonces, cómo construir estos haces automorfos. Resultó ser un problema muy difícil. A principios de los años ochenta, Drinfeld propuso la primera de tales construcciones para el caso más sencillo (profundizando en un trabajo no publicado de Pierre Deligne). Pocos años después, Gérard Laumon desarrolló las ideas de Drinfeld.

Cuando conocí a Drinfeld, me dijo que había ideado un método radicalmente nuevo para construir haces automorfos. Pero la nueva construcción que había concebido dependía de cierta conjetura que creía que yo podría derivar de mi trabajo con Feigin en álgebras Kac-Moody. No podía creérmelo: ¿podía mi trabajo ser útil para el Programa Langlands?

La posibilidad de hacer algo relacionado con el Programa Langlands me hizo querer aprender todo lo que se sabía al respecto. Aquella primavera acudí al despacho de Drinfeld en Harvard casi todos los días, y lo acribillé a preguntas acerca del Programa Langlands, que, paciente, respondió una a una. Él también me preguntaba sobre mi trabajo con Feigin, cuyos detalles eran

cruciales para lo que intentaba hacer. El resto del día yo devoraba todo lo que encontrara en la biblioteca de Harvard acerca del Programa Langlands. El tema era tan atractivo que intentaba dormir cada noche lo antes posible para que la mañana llegara antes y poder sumergirme aún más en el Programa Langlands. Sabía que me estaba embarcando en uno de los proyectos más importantes de mi vida.

Hacia finales del semestre de primavera ocurrió algo más, que me devolvió a la kafkiana experiencia de mis exámenes de entrada a la Universidad de Moscú. Un día, Victor Kac me llamó a mi casa en Cambridge y me dijo que alguien había invitado a Anatoli Logunov, el presidente (o rector, como se le denominaba) de la Universidad de Moscú a dar una conferencia en el Departamento de Física del MIT. Kac y muchos de sus colegas estaban indignados por que el MIT ofreciese una tribuna al responsable directo de la discriminación contra los estudiantes judíos en los exámenes de entrada a la MGU. Kac y los demás opinaban que sus acciones eran constitutivas de delito y que, por lo tanto, tal invitación era un escándalo.

Logunov era un hombre muy poderoso: no sólo era el rector de la MGU, sino también el director del Instituto de Física de Alta Energía, miembro del Comité Central del Partido Comunista de la Unión Soviética y más. Pero ¿por qué le invitaba alguien del MIT? En cualquier caso, Kac y sus colegas protestaron y exigieron que tanto su visita como su conferencia se cancelasen. Tras algunas negociaciones, se llegó a un compromiso: Logunov vendría y daría su conferencia, pero tras la misma habría un debate público acerca de la situación en la MGU y el público tendría ocasión de enfrentarse a él por la discriminación. Sería como una asamblea municipal.

Naturalmente, Kac me pidió que acudiera a la reunión para presentar mi historia como testimonio directo de lo que estaba ocurriendo en la MGU bajo la dirección de Logunov. Yo tenía mis reparos al respecto. Estaba convencido de que Logunov acudiría acompañado por sus «ayudantes», que tomarían nota de todo. Hay que recordar que era mayo de 1990, y faltaba más de un año para el

fallido *putsch* de agosto de 1991 que daría inicio al derrumbe de la Unión Soviética. Y yo iba a regresar en verano. Si decía cualquier cosa ligeramente embarazosa para un funcionario soviético de alto rango como Logunov, me metería en serios problemas. Como mínimo, me impedirían abandonar la Unión Soviética y regresar a Harvard. Aun así, no podía negarme a la proposición de Kac. Sabía cuán importante podía resultar mi testimonio en esa reunión, de modo que respondí a Victor que acudiría y que, de ser necesario, testificaría. Kac intentó darme ánimos:

—No te preocupes, Edik —dijo—; si te meten en la cárcel por esto, haré todo lo que esté en mi mano para sacarte.

La noticia del acontecimiento se difundió rápidamente y la sala de conferencias estaba a rebosar para la conferencia de Logunov. La gente no acudía para aprender nada de su clase. Todo el mundo sabía que Logunov era un físico mediocre que había construido su carrera intentando desacreditar la teoría de la relatividad de Einstein (me pregunto por qué). Como era de esperar, la charla (acerca de su «nueva» teoría gravitatoria) fue insustancial. Pero fue bastante inusual en muchos aspectos. En primer lugar, Logunov no hablaba inglés, y dio su conferencia en ruso, que un hombre alto, vestido con traje y corbata negros, traducía simultáneamente a un inglés perfecto. Hubiera podido llevar la palabra «KGB» escrita en grandes letras de imprenta en su frente. Su clon (como en la película *Matrix*) estaba sentado entre el público, mirando a su alrededor.

Antes de la charla, uno de los anfitriones de Logunov lo presentó de una manera muy particular: proyectó una diapositiva de una primera página de un artículo en inglés, escrito por Logunov y otras personas, publicado hacía una década. Supongo que intentaban demostrar que Logunov no era un completo idiota, sino que en realidad tenía varias publicaciones a su nombre en distintas revistas académicas. Nunca había visto presentar a nadie de esta manera. Estaba claro que a Logunov no se le había invitado a charlar en el MIT por su brillantez científica.

No hubo protestas durante la conferencia, aunque Kac había distribuido entre los miembros del público fotocopias de documentos condenatorios. Uno de ellos era una transcripción de un compañero judío de una década atrás. Había sacado excelentes en todas las asignaturas y aun así, durante su último año en la MGU, lo habían expulsado por «fracaso académico». Una corta nota añadida a la transcripción informaba al lector que agentes desplegados habían visto a este estudiante en la sinagoga de Moscú.

Tras la conferencia, la gente se trasladó a otra habitación y se sentó alrededor de una gran mesa rectangular. Logunov se situó a un lado, cerca de uno de los extremos, flanqueado por sus dos «ayudantes» trajeados, que le traducían, y Kac y otros acusadores se sentaban al otro lado de la mesa, directamente frente a él. Yo me senté, callado, con algunos amigos, en el extremo opuesto de la mesa, a un lado de Logunov, de modo que no me prestaba atención.

Al principio hablaron Kac y otros, y contaron que habían oído muchas historias acerca de estudiantes judíos no admitidos en la MGU. Preguntaron a Logunov si él, como rector de la Universidad de Moscú, tenía algo que decir al respecto. Evidentemente, lo negó todo, le dijeran lo que le dijeran. En un momento determinado uno de los individuos con traje dijo, en inglés:

—¿Sabe? El profesor Logunov es una persona muy modesta y nunca le confesaría esto. Pero yo lo haré. En realidad, ha ayudado a muchas personas judías con sus carreras.

Entonces el otro tipo trajeado dijo a Kac y los demás:

—Deberían explicarse o callarse. Si tienen algún caso concreto del que quieran hablar, expónganlo. Si no, el profesor Logunov es un hombre ocupado y tiene otros asuntos que atender.

En ese momento, evidentemente, Kac dijo:

—En realidad sí, tenemos un caso concreto del que le queremos hablar —e hizo un gesto hacia mí.

Me puse de pie. Todo el mundo me miró, incluidos Logunov y su «ayudantes». Sus caras traicionaban cierta ansiedad. Ahora me enfrentaba a Logunov

directamente.

—Muy interesante —dijo Logunov en ruso (esto se tradujo para todo el mundo) y luego se dirigió a sus ayudantes—: No olviden apuntar su nombre.

He de confesar que estaba un poco asustado, pero había llegado al punto de no retorno. Me presenté y dije:

—Me suspendieron en los exámenes de ingreso en el Mekh-Mat hace seis años. Y luego describí brevemente lo que había pasado en los exámenes. La habitación estaba en silencio. Era una declaración «concreta» de una víctima de la política de Logunov, y no había manera de negar que hubiera sucedido. Los dos ayudantes se apresuraron a minimizar los daños.

—Así que le suspendieron en la MGU. Tras ello, ¿dónde solicitó su entrada?

—Fui al Instituto de Petróleo y Gas.

—Acudió a Kerosinka —tradujo el ayudante a Logunov, quien asintió enérgico: evidentemente, sabía que se trataba de uno de los pocos lugares de Moscú en que aceptaban a estudiantes como yo.

—Bueno —siguió el ayudante—, tal vez la competencia en el Instituto de Petróleo y Gas no era tan dura como en la MGU. ¿Quizá por eso entró en una y no en la otra?

Eso era falso: yo sabía de buena tinta que había muy poca competencia en el Mekh-Mat entre quienes no eran discriminados. Me habían dicho que con un «notable» y tres «aprobados» entre los cuatro exámenes era suficiente para ingresar. Los exámenes de ingreso en Kerosinka eran, por el contrario, muy competitivos. En ese momento, Kac intervino:

—Mientras era estudiante, Edward realizó descubrimientos matemáticos avanzados e innovadores y lo invitaron como profesor visitante a Harvard con sólo veintiún años, menos de cinco años después de que lo suspendieran en la MGU. ¿Está sugiriendo que la competencia para el puesto en Harvard era también menor que la entrada en la MGU?

Un largo silencio. Entonces, de repente, Logunov se animó.

—¡Me siento indignado por esto! —gritó—. Investigaré y castigaré a los

responsables de suspender a este joven. ¡No permitiré que este tipo de cosas pasen en la MGU!

Y siguió diciendo cosas por el estilo durante unos minutos.

¿Qué podía uno responder ante eso? Nadie en la mesa se creía que el arrebato de Logunov fuera sincero ni que fuera a hacer nada. Logunov era muy listo. Al expresar su supuesta indignación por un caso evitaba un tema mucho más amplio: los despiadados suspensos a miles de otros estudiantes, como consecuencia de una política de discriminación cuidadosamente calculada y claramente condonada por los máximos dignatarios de la MGU, incluido el propio rector.

No era posible llevar todos esos casos a la reunión y demostrar que había una política concertada de antisemitismo en los exámenes de ingreso a Mekh-Mat. Y aunque había cierto grado de satisfacción por haber podido enfrentarme cara a cara con mi torturador y obligarle a admitir que, en efecto, sus subordinados me habían perjudicado, todos sabíamos que la cuestión más importante había quedado sin responder.

Los anfitriones de Logunov, visiblemente molestos por la publicidad negativa que había rodeado su visita, querían acabar con esta lo antes posible. Levantaron la sesión y se lo llevaron de allí. Nunca se le volvió a invitar.

Capítulo 15
Una danza delicada

En otoño de 1990 me convertí en estudiante de doctorado en Harvard, algo que debía hacer para pasar de profesor visitante a algo más permanente. Joseph Bernstein accedió a ser mi tutor oficial. Para entonces yo ya tenía material más que suficiente para una tesis doctoral, y Arthur Jaffe consiguió que el decano declinara para mí el habitual requerimiento de dos años como estudiante a fin de poder conseguir mi doctorado en un año. Por eso, mi «degradación» de profesor visitante a estudiante de doctorado no duró mucho.

En realidad escribí mi tesis doctoral acerca de un nuevo proyecto, que acabé durante aquel año. Todo comenzó debido a mis debates con Drinfeld acerca del Programa Langlands, aquella primavera. Este es uno de ellos en forma de guión cinematográfico.

ENTRADA EN FUNDIDO

INTERIOR DEL DESPACHO DE DRINFELD EN HARVARD

DRINFELD camina delante de su pizarra.

EDWARD, sentado en una silla, toma notas. En la mesa, junto a él, hay una taza de té.

DRINFELD

De modo que la conjetura Shimura Taniyama Weil nos ofrece un vínculo entre ecuaciones cúbicas y formas modulares, pero Langlands fue mucho más allá. Concibió una relación mucho más general, en la que las representaciones automorfas de un grupo de Lie interpretan el papel de las formas modulares.

EDWARD

¿Qué es una representación automorfa?

DRINFELD

(Tras una larga pausa)

Ahora mismo la definición exacta no es importante. Y, en cualquier caso, la puedes encontrar en un libro. Lo importante es que se trata de la representación de un grupo de Lie G: por ejemplo, el grupo SO(3) de rotaciones de una esfera.

EDWARD

OK. Y ¿con qué están relacionadas estas representaciones automorfas?

DRINFELD

Bueno, esa es la parte más interesante: Langlands predijo que estarían relacionadas con representaciones del grupo de Galois en otro grupo de Lie.[1]

EDWARD

Ya veo. ¿Quieres decir que este grupo de Lie no es el mismo grupo G?

DRINFELD

¡No! Es otro grupo de Lie, al que se denomina grupo Langlands dual de G.[131]

DRINFELD escribe el símbolo L_G en la pizarra.

EDWARD

¿La L es por Langlands?

DRINFELD

(esboza una sonrisa)

Bueno, la motivación original de Langlands era comprender algo llamado funciones L, de modo que llamó a este grupo «grupo L»…

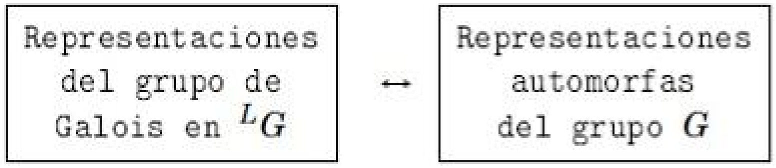
EDWARD

Déjame ver si comprendo esto. Para todo grupo de Lie G existe otro grupo de Lie llamado L_G, ¿correcto?

DRINFELD

Sí. Y aparece en la relación Langlands, que esquemáticamente es algo así:

DRINFELD escribe un diagrama en la pizarra[2132]:



EDWARD

No lo entiendo... al menos, todavía no. Pero permíteme una pregunta más sencilla ¿cuál es el grupo Langlands dual de, pongamos por caso, SO(3)?

DRINFELD

Es bastante fácil: es un recubrimiento doble de SCX3). ¿Has visto el truco del vaso?

EDWARD

¿El truco del vaso? Ah, sí, ya me acuerdo...

FUNDE A:

INTERIOR DE UNA CASA; FIESTA DE ESTUDIANTES DE HARVARD

Una docena de estudiantes, aproximadamente, veinteañeros, hablan y beben cerveza y vino. EDWARD está hablando con una ESTUDIANTE.

ESTUDIANTE

Así es como funciona.

La ESTUDIANTE toma un vaso de plástico con vino y lo coloca en la palma abierta de su mano derecha. Entonces comienza a rotar la palma de su mano y el brazo (como en las fotografías de abajo). Tras realizar un giro completo (360 grados) su brazo está completamente torcido. Manteniendo el vaso derecho, sigue rotando otra vuelta entera y ¡sorpresa! Su brazo y el vaso regresan a la posición inicial, como si no hubieran girado.[3133]

OTRO ESTUDIANTE

He oído que los filipinos tienen una danza tradicional del vino en que hacen esto con las dos manos.[4134]

Coge dos vasos de cerveza e intenta rotarlos a la vez, pero sus manos no son firmes y pronto vuelca cerveza de ambos vasos. Todo el mundo se ríe.

FUNDIDO A: OTRA VEZ EN EL DESPACHO DE DRINFELD

DRINFELD

El truco demuestra el hecho de que hay un camino cerrado en el grupo SO(3) que es no trivial, pero si cruzamos dos veces este camino, obtenemos un camino trivial.[5135]

EDWARD

Oh, ya veo. El primer giro completo del vaso te retuerce el brazo cuando haces esto, y equivale a un camino no trivial en SO(3).

Toma una taza de té de la mesa y realiza el movimiento del primer giro.

EDWARD

Uno pensaría que el segundo giro retorcería aún más el brazo. En lugar de ello, lo vuelve a dejar recto.

EDWARD completa el movimiento.

DRINFELD

Exactamente.[6136]

EDWARD

¿Qué tiene todo esto que ver con el grupo Langlands dual?

DRINFELD

El grupo Langlands dual de SO(3) es un doble recubrimiento de SO(3), de modo que…

EDWARD

De modo que por cada elemento de SO(3) hay dos elementos del grupo dual Langlands.

DRINFELD

Debido a ello, este nuevo grupo[7137] no tendrá ningún camino cerrado no trivial.

EDWARD

¿De modo que pasar al grupo Langlands dual es una manera de deshacerse de este extraño torcimiento?

DRINFELD

En efecto.[8 138] A primera vista puede parecer una diferencia menor, pero en realidad tiene importantes consecuencias, como diferencias de comportamiento en los ladrillos fundamentales de la materia, como electrones y quarks, y en las partículas que interactúan con ellos, como los fotones. En grupos de Lie más generales, la diferencia entre el grupo y su grupo Langlands dual es incluso más pronunciada. En muchos casos no hay vínculo aparente entre los dos grupos duales.

EDWARD

¿Por qué aparece el grupo dual en la relación Langlands? Parece magia...

DRINFELD

En realidad no lo sabemos.

FUNDIDO A NEGRO



Truco del vaso (de izquierda a derecha, de arriba abajo). Fotos de Andrea Young.

La dualidad Langlands construye una relación de paridad entre grupos de Lie: para cada grupo de Lie *G* hay un grupo Langlands dual L_G, y el dual de L_G es el propio *G*.[139] Ya es bastante sorprendente que el Programa Langlands relaciones dos tipos diferentes de objetos (uno de teoría de números y otro de análisis armónico) pero que dos grupos duales, *G* y L_G, aparezcan en ambos lados de la relación, como muestra el diagrama de la p. 247, es realmente desconcertante.

Ya hemos hablado anteriormente de cómo el Programa Langlands conecta diferentes continentes del mundo de las matemáticas. A modo de analogía,

digamos que esos continentes fueran Europa y Norteamérica, y que tuviéramos una manera de enlazar a cada persona de Europa con una de Norteamérica, y viceversa. Es más, supongamos que bajo esta relación, varios atributos, como peso, altura y edad, coincidieran perfectamente, pero que los géneros estuvieran invertidos: cada hombre estaría enlazado a una mujer, y viceversa. Sería como un interruptor entre un grupo de Lie y su grupo Langlands dual bajo la relación predicha por el Programa Langlands.

Este interruptor es, en realidad, el factor más misterioso del Programa Langlands. Conocemos varios mecanismos que describen cómo aparece el grupo dual, pero todavía no comprendemos *por qué* aparece. Esa ignorancia es uno de los motivos por los que intentamos difundir las ideas del Programa Langlands a otros campos de las matemáticas (a través de la piedra Rosetta) y a la física cuántica, como veremos en el próximo capítulo. Queremos hallar más ejemplos de la aparición del grupo Langlands dual y esperamos que ello nos proporcione más pistas acerca de por qué ocurre y qué significa.

Centrémonos en la columna de la derecha de la piedra Rosetta de Weil, que concierne a las superficies de Riemann. Como establecimos en el capítulo previo (véase el diagrama de la p. 238) en la versión de la relación Langlands que juega con esta columna, en el reparto de personajes están los «haces automorfos» interpretando el papel de las funciones automorfas (o representaciones automorfas) asociadas al grupo de Lie *G*. Resulta que estos haces automorfos «viven» en cierto espacio vinculado a la superficie de Riemann *X* y el grupo *G*, llamado espacio de móduli de *G*-fibrados sobre *X*. Por el momento no nos interesa saber exactamente qué es.[140] En el otro lado de la relación, el papel del grupo de Galois lo desempeña el grupo fundamental de esta superficie de Riemann, como hemos visto en el capítulo 9. Por tanto, del diagrama de la p. 247 hallamos que la relación geométrica Langlands (también denominada correspondencia geométrica Langlands) debería ser algo así:

Representaciones del grupo fundamental de X en ${}^{L}G$	$\longleftrightarrow$	Haces automorfos en el espacio de móduli de G-fibrados sobre X

Esto significa que a cada representación del grupo fundamental en L_G deberíamos poderle asociar un haz automorfo. Y Drinfeld tenía una idea radicalmente nueva acerca de cómo hacerlo.

ENTRADA EN FUNDIDO

INTERIOR DEL DESPACHO DE DRINFELD

DRINFELD

Así que hemos de hallar un modo sistemático de construir estos haces automorfos. Y creo que las representaciones de álgebras Kac-Moody pueden funcionar.

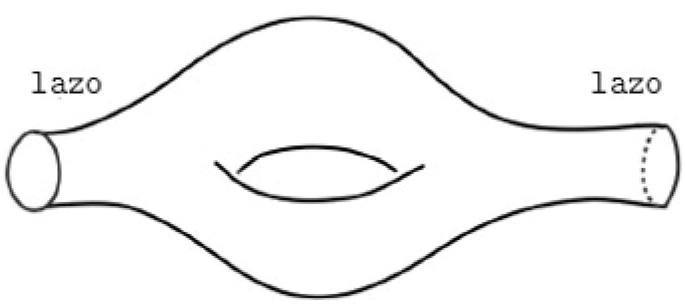
EDWARD

¿Por qué?

DRINFELD

Ahora estamos en el mundo de las superficies de Riemann. Una superficie de estas puede tener límites, que son lazos.

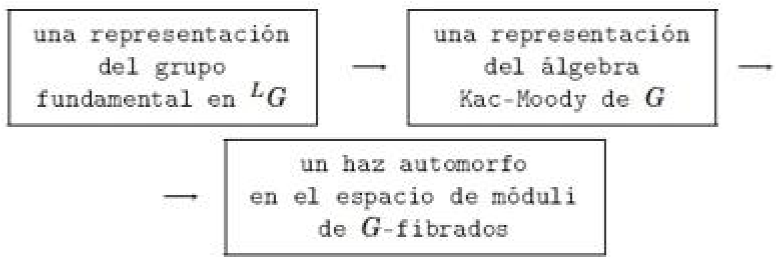
DRINFELD dibuja una ilustración en la pizarra.



DRINFELD

Los lazos de una superficie de Riemann nos dan un vínculo a los grupos de lazos y, por consiguiente, a las álgebras Kac Moody. Con este vínculo podemos convertir representaciones de un álgebra Kac Moody en haces en el espacio de móduli de G-fibrados sobre nuestra superficie de Riemann. Ignoremos los detalles de momento. De un modo esquemático, espero que funcione de esta manera:

Dibuja un diagrama en la pizarra.



DRINFELD

La segunda flecha no me parece problemática. La verdadera pregunta es cómo construir la primera flecha. Feigin me contó acerca de tu trabajo en las representaciones de álgebras Kac-Moody. Creo que puede ser válido aquí.

EDWARD

Pero en tal caso, las representaciones del álgebra Kac-Moody de G deberían de algún modo «saber» acerca del grupo Langlands dual ^{L}G.

DRINFELD

Exacto.

EDWARD

¿Cómo es posible?

DRINFELD

Esa es una pregunta para ti.

FUNDIDO EN NEGRO

Supongo que me sentía un poco como Neo hablando con Morfeo en la película *Matrix*. Era fascinante y daba un poco de miedo. ¿Sería capaz de aportar algo nuevo en este campo?

Para poder explicar cómo enfoqué este problema, tengo que explicarle acerca de un eficaz método para construir representaciones del grupo fundamental de una superficie de Riemann. Se hace empleando ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función con sus derivadas. Por ejemplo, imaginemos un coche moviéndose en una carretera recta. Esta carretera tiene una coordenada; llamémosla x. La posición del coche en un momento t del tiempo queda, por tanto, codificada por la función $x(t)$. Por ejemplo, podría ser que $x(t) = t^2$.

La velocidad del coche es la razón entre la distancia viajada en un pequeño período de tiempo ?t y este período de tiempo:

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

Si el coche viaja a una velocidad constante, no importa qué período temporal ?t tomemos. Pero si el coche va cambiando de velocidad, un ?t más pequeño nos daría un cálculo más preciso de la velocidad en el momento t. Para conseguir el valor exacto e instantáneo de la velocidad en ese momento, tenemos que tomar el límite de esta razón conforme ?t se acerca a 0. Este límite es la derivada de $x(t)$. Lo señalamos como $x'(t)$.

Por ejemplo, si $x(t) = t^2$, entonces $x'(t) = 2t$, y, de un modo más general, si $x(t) = t^n$, entonces $x'(t) = nt^{n-1}$. Estas fórmulas no son difíciles de derivar, pero en este momento no nos resulta necesario.

Muchas leyes de la naturaleza se pueden expresar mediante ecuaciones diferenciales, es decir, ecuaciones que implican funciones y sus derivadas. Por

ejemplo, las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo, de las que hablaremos en el siguiente capítulo, son ecuaciones diferenciales, como lo son también las ecuaciones de Einstein para describir la fuerza de la gravedad. En realidad, la mayoría de modelos matemáticos (sean en física, biología, química o mercados financieros) implican ecuaciones diferenciales. Incluso las preguntas más sencillas que uno se puede plantear acerca de economía doméstica, como el cálculo del interés compuesto, nos llevan rápidamente a las ecuaciones diferenciales.

He aquí un ejemplo de ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t}$$

La función $x(t) = t^2$ es una solución de esta ecuación. En efecto, tenemos que $x'(t) = 2t$, y que $2x(t)/t = 2t^2/t = 2t$, de modo que si sustituimos $x(t) = t^2$ a izquierda y derecha obtenemos la misma expresión, $2t$. Más aún: resulta que cualquier solución a esta ecuación posee la forma $x(t) = Ct^2$, donde C es un número real independiente de t (es C de «constante»). Por ejemplo, $x(t) = 5t^2$ es una solución.

De igual modo, las soluciones de la ecuación diferencial

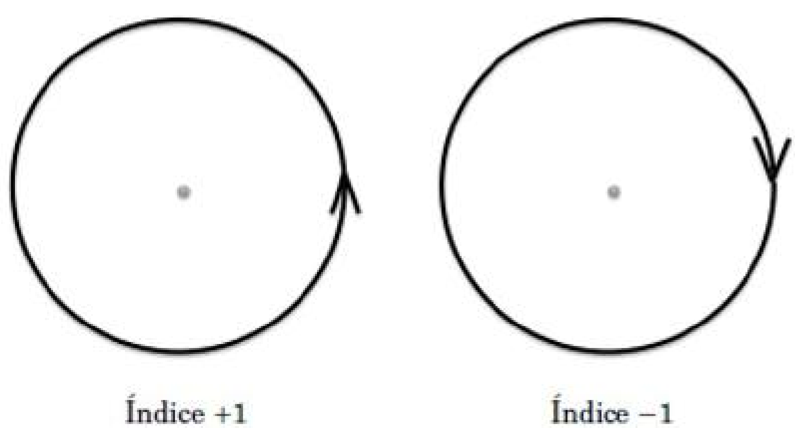
$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

las da la fórmula $x(t) = Ct^n$, en que C es un número real arbitrario.

Nada nos impide que n sea un número negativo aquí. La ecuación aún tendría sentido, y la fórmula $x(t) = Ct^n$ también seguiría teniendo sentido, sólo que la función ya no se podría definir en $t = 0$. De modo que excluyamos $t = 0$. Una vez lo hagamos, podemos hacer que n sea cualquier número racional arbitrario, e incluso un número real arbitrario.

Y ahora efectuamos un paso adicional: en la formulación original de esta ecuación diferencial, tratábamos *t* como tiempo, de modo que suponíamos que era un número real. Ahora supongamos que *t* es un número complejo, de modo que tiene la forma $r + s\sqrt{-1}$, en que *r* y *s* son números reales. Como vimos en el capítulo 9 (véase gráfico en p. 152) los números complejos pueden representarse como puntos en el plano con coordenadas *r* y *s*. Una vez hacemos que *t* sea complejo, $x(t)$ se convierte, *de facto*, en una función sobre el plano. Es decir, en el plano menos un punto. Dado que decidimos que $x(t)$ no se puede definir en el punto $t = 0$, que es el origen en el plano (en que ambas coordenadas, *r* y *s*, son iguales a 0) $x(t)$ queda definido en el plano excepto un punto, el origen.

Ahora traemos a colación el grupo fundamental. Los elementos del grupo fundamental, como vimos en el capítulo 9, son caminos cerrados. Veamos el grupo fundamental del plano con un punto excluido. En ese caso, todo camino cerrado tiene un «índice»: es el número de veces que el camino cerrado gira alrededor del punto excluido. Si el camino gira en sentido contrario a las agujas del reloj, lo contamos en positivo, y si lo hace en sentido de las agujas del reloj, lo contamos con signo negativo.[141] En la imagen se muestran los caminos cerrados con los índices +1y-1.



Un camino en espiral que diera dos vueltas y cruzara sobre sí mismo para

regresar a su inicio tendría un índice de +2ode-2, y así seguiríamos para caminos más complicados.

Regresemos a nuestra ecuación diferencial:

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

en que *n* es un número real arbitrario y *t* toma, ahora, valores en números complejos. Esta ecuación tiene una solución $x(t) = t^n$. Sin embargo, hay una sorpresa aguardando: si *n* no es un entero, cuando evaluemos la solución a lo largo de un camino cerrado en un plano y regresemos al mismo punto, el valor de la solución en el punto final no será necesariamente el valor con el que comenzamos. Se verá multiplicado por un número complejo. En esta situación, decimos que la solución ha sufrido una *monodromía* a lo largo de su camino.

La afirmación de que algo cambia cuando efectuamos una vuelta completa puede parecer poco intuitiva, e incluso contradictoria al principio. Pero todo depende de lo que queramos decir cuando hablamos de una vuelta completa. Podemos recorrer un camino cerrado y regresar al punto de inicio en el sentido de un atributo *en particular*, como nuestra posición en el espacio. Pero otros atributos también pueden sufrir cambios.

Pensemos en este ejemplo. Rick conoció a Ilsa en una comida formal el 14 de marzo de 2010 e instantáneamente se enamoró. A Ilsa no le decía nada Rick al principio, pero accedió a una cita con él, de todos modos. Y luego otra. Y otra. A Ilsa comenzó a gustarle Rick: es divertido, listo y se preocupa de ella. Antes de darse cuenta estaba enamorada; incluso cambió su estatus de Facebook a «en una relación», y Rick hizo lo mismo. El tiempo voló, y pronto fue nuevamente 14 de marzo, el aniversario del día en que se conocieron. Desde el punto de vista del calendario (si sólo atendemos al día y al mes, e ignoramos el año) Rick e Ilsa habían efectuado una vuelta completa. Pero las cosas habían cambiado. El día en que se conocieron, Rick estaba enamorado e Ilsa no. Pero

un año después ya no era así; en realidad podían estar igual de enamorados, o quizá Ilsa completamente loca de amor y Rick... de aquella manera. Incluso es posible que Rick se hubiera desenamorado de Ilsa y comenzado a ver en secreto a alguien más. No lo sabemos. Lo importante es que pese a que habían regresado a la misma fecha del calendario, 14 de marzo, el amor que sentían mutuamente había cambiado.

Ahora bien, mi padre me dice que este ejemplo es confuso porque parece sugerir que Rick e Ilsa hubieran regresado al mismo punto en el tiempo, lo que es imposible. Pero en lo que me estoy centrando es en los atributos: para ser específicos, en mes y día. En ese sentido, ir del 14 de marzo de 2010 al 14 de marzo de 2011 es dar, efectivamente, una vuelta entera.

Pero quizá sea más útil imaginar un camino cerrado en el espacio. Supongamos que, mientras estaban juntos, Rick e Ilsa dieron una vuelta al mundo. Mientras viajaban su relación iba evolucionando, de modo que al regresar al punto de partida (su ciudad) el amor que sentían uno por el otro podía haber cambiado. En el primer caso, tenemos un camino cerrado en el tiempo (para ser más exactos, en el calendario de días y meses) y en el segundo caso, un camino cerrado en el espacio. Pero las conclusiones son similares: ambos escenarios ilustran un fenómeno que podríamos denominar monodromía del amor.

Matemáticamente, podemos representar el amor de Rick por Ilsa con el número x, y el amor de Ilsa por Rick, con el número y. En ese caso, podemos representar el estado de su relación en cada momento por un punto en el plano con coordenadas (x, y). Por ejemplo, en el primer escenario, el día en que se conocen, era el punto (1,0). Pero posteriormente, conforme se movían en un camino cerrado (en tiempo o en espacio) la posición del punto cambiaba. De aquí que la evolución de su relación se represente como una trayectoria en el plano XY. La monodromía es sencillamente la diferencia entre el punto de inicio y el punto final de esta trayectoria.

He aquí un ejemplo menos romántico. Supongamos que está usted subiendo una escalera en espiral y da una vuelta entera. Con respecto a una proyección

de su posición sobre el suelo, usted acaba de dar una vuelta entera. Pero otro atributo (su altitud) ha cambiado: ha llegado usted al siguiente piso. Eso también es una monodromía. Podemos unir este ejemplo con el primero que pusimos, porque el calendario es también como una espiral: 365 días del año equivalen a una vuelta en proyección sobre el suelo, pero el año es como la altitud. Por tanto, ir de una fecha determinada, como el 14 de marzo de 2010, a la misma fecha de un año después es como subir por la escalera.

Volvamos a la solución de nuestra ecuación diferencial. Un camino cerrado en el plano es como el camino cerrado de su proyección sobre el suelo. El valor de la solución es como la altitud de su posición en la escalera. Desde este punto de vista, no debería suponer una sorpresa que el valor de la solución, conforme damos una vuelta entera, sea diferente al valor inicial.

Tomando la razón entre estos dos valores, obtenemos la monodromía de la solución a lo largo de su camino. Resulta que podemos interpretar esta monodromía como un elemento del grupo circular.[142] Para ilustrar mejor esto, imagine que pudiera doblar un bastón de caramelo hasta que tuviera la forma de un donut. Luego siga la raya espiral de color rojo. Moverse a lo largo del bastón es como seguir un camino cerrado en el plano, y la raya roja sería nuestra solución. Cuando demos una vuelta entera al bastón, por lo general la raya roja habrá quedado en un punto diferente al de inicio. Esa diferencia es la monodromía de nuestra solución. Corresponde a una rotación del bastón en un ángulo determinado.

El cálculo presentado en la nota 12 muestra que la monodromía a lo largo de un camino cerrado con el índice + 1 es el elemento del grupo circular correspondiente a una rotación de 360*n* grados. Por ejemplo, si *n* = 1/6, entonces asignamos a su camino la rotación de 360/6 = 60 grados. De igual manera, la monodromía a lo largo del camino con el índice *w* es la rotación de 360*wn* grados.

El resultado de todo esto es que las monodromías a lo largo de diferentes caminos en el plano sin un punto dan lugar a una representación de su grupo

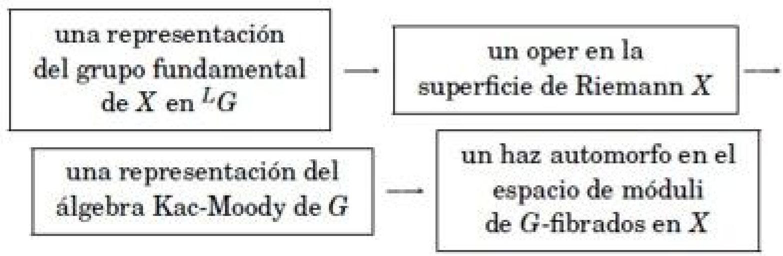
fundamental en el grupo circular.[143]. De un modo más general, podemos construir representaciones del grupo fundamental de cualquier superficie de Riemann (posiblemente quitando algunos puntos, como en este caso) con sólo evaluar la monodromía de las ecuaciones diferenciales definidas en su superficie. Estas ecuaciones van a ser más complicadas, pero localmente, en un pequeño entorno de un punto en la superficie, parecerán similares a la de arriba. Mediante la monodromía de soluciones de ecuaciones incluso más sofisticadas podemos construir, de igual modo, representaciones del grupo fundamental de una superficie de Riemann dada en grupos de Lie que no sean el grupo circular. Por ejemplo, podemos construir representaciones del grupo fundamental en el grupo SO(3).

Regresemos al problema al que yo me enfrentaba: comenzamos con un grupo de Lie *G* y tomamos la correspondiente álgebra Kac-Moody. La conjetura de Drinfeld exigía hallar un vínculo entre representaciones de esta álgebra Kac-Moody y representaciones del grupo fundamental del grupo Langlands dual L_G.

El primer paso es sustituir las representaciones del grupo fundamental por ecuaciones diferenciales adecuadas, cuya monodromía tome valores en L_G. Esto hace la cuestión más algebraica y, por tanto, más cercana al mundo de las álgebras Kac-Moody. Los tipos de ecuaciones diferenciales relevantes aquí los introdujeron con anterioridad (en esencia, en el caso de un plano sin un punto, como las de arriba) Drinfeld y Sokolov en la época en que Drinfeld estaba «exiliado» en Ufa. Tras ello, Beilinson y Drinfeld generalizaron ese trabajo a superficies de Riemann arbitrarias y llamaron «opers» a las ecuaciones diferenciales resultantes. La palabra «oper» viene, evidentemente, de «operador», pero era también en parte una broma, puesto que en Rusia es un término coloquial para referirse a los agentes de policía, como «pasma».

En mi tesis, a partir del trabajo que realicé en Moscú con Borya, pude construir representaciones del álgebra Kac-Moody de *G* parametrizadas por los opers correspondientes al grupo Langlands dual L_G. La existencia de un vínculo entre

las dos era casi milagrosa: el álgebra Kac-Moody asociada a G «conocía», de alguna manera, la existencia del grupo Langlands dual L_G, como Drinfeld había predicho. Esto hizo que su plan funcionara según el siguiente esquema:[144]



Mi demostración de este resultado era técnicamente bastante compleja. Fui capaz de explicar *cómo* aparecía el grupo Langlands dual, pero incluso ahora, más de veinte años después, me sigue pareciendo un misterio *por qué* aparece. Resolví el problema, pero, en definitiva, me resultó poco satisfactorio sentir que algo aparecía de la nada. Desde entonces, mi investigación se ha visto motivada en parte por encontrar una explicación más completa.

A menudo ocurre esto. Uno demuestra un teorema, otros lo verifican, se hacen nuevos avances en el campo basados en el nuevo resultado, pero la auténtica comprensión de su significado puede tardar años o incluso décadas. Sé que incluso si yo no encuentro la respuesta, la antorcha pasará a manos de nuevas generaciones de matemáticos que finalmente la hallarán. Aunque, por supuesto, me gustaría llegar en persona al corazón de la cuestión.

Beilinson y Drinfeld emplearon posteriormente el teorema de mi tesis en su bella construcción de la relación geométrica Langlands (en la columna derecha de la piedra Rosetta de Weil, véase p. 253). Su espectacular trabajo resultó el comienzo de un nuevo capítulo en el Programa Langlands, y trajo un alud de nuevas ideas y descubrimientos en el tema, profundizando aún más en él.

Posteriormente resumí la investigación que realicé en esta área (parte de ella con Borya, parte con Dennis Gaitsgory) en mi libro *Langlands Correspondence for Loop Groups*, publicado por Cambridge University Press.[145] Salió en 2007,

exactamente veinte años después de que yo escribiera mis primeras fórmulas para la construcción de campo libre de álgebras Kac-Moody en un tren nocturno, de regreso a casa desde la dacha de Borya, un cálculo que (cómo iba yo a saberlo) daría inicio a mi largo viaje hacia el Programa Langlands.

Como epígrafe para mi libro, escogí estos versos de un poema de 1931 de E. E. Cummings, uno de mis poetas favoritos:

Concentric geometries of transparency slightly
joggled sink through algebras of proud
inwardlyness to collide spirally with iron arithmetics… [xxiv]

Me parece una poética metáfora de lo que intentamos conseguir en el Programa Langlands: una unidad de geometría, álgebra y aritmética, es decir, teoría de números. La alquimia de la actualidad.

La obra de Beilinson y Drinfeld resolvió problemas que se arrastraban desde hacía tiempo, pero también suscitó nuevas preguntas. Es lo que sucede en las matemáticas: cada nuevo resultado descorre parte del velo de lo desconocido, pero lo que en ese momento pasa a ser conocido no abarca sólo soluciones: incluye preguntas que no sabíamos formular, direcciones que no sabíamos que podíamos explorar. Y así cada descubrimiento nos inspira a dar nuevos pasos y nunca nos deja satisfechos en nuestra búsqueda de conocimiento.

En mayo de 1991 asistí a la ceremonia de graduación de Harvard. Fue un momento incluso más emocionante para mí porque el orador inicial era Eduard Shevardnadze, uno de los arquitectos de la *perestroika* en la Unión Soviética. Acababa de dimitir de su puesto como ministro de Asuntos Exteriores como protesta contra la violencia en las repúblicas bálticas, advirtiendo contra una incipiente dictadura.

Eran tiempos turbulentos. Nada sabíamos del tumulto que estaba aún por llegar: el *coup d'état* en agosto de ese mismo año, la posterior ruptura de la

[xxiv] («Geometrías de transparencia concéntricas ligeramente / turbias se hunden en álgebras de orgullosa / reserva para chocar en espiral con aritméticas de hierro…»).

Unión Soviética, las inmensas dificultades que la mayoría de la gente debería soportar en el curso de las reformas económicas.

Tampoco podíamos prever el controvertido mandato de Shevardnadze como presidente de la República de su Georgia natal. Aquel glorioso y soleado día en Harvard Yard yo quería decir «gracias» al hombre que había ayudado a liberarme, y a millones de compatriotas míos, del régimen comunista.

Me acerqué a él tras su discurso y le dije que acababa de recibir mi doctorado de Harvard, algo que no habría sido posible sin la *perestroika*. Sonrió y me respondió en ruso, con su encantador acento georgiano:

—Me alegra oír eso. Le deseo grandes éxitos en su trabajo.

Se detuvo y añadió, como auténtico georgiano:

—Y felicidad en su vida personal.

A la mañana siguiente volé hacia Italia. Victor Kac me invitaba a una conferencia que organizaba en Pisa con su colega italiano Corrado De Concini. De Pisa fui hasta Córcega para otra reunión, y tras esta, a una en Kioto, Japón. Estas conferencias reunieron a físicos y matemáticos interesados en las álgebras Kac-Moody y sus aplicaciones a la física cuántica. Yo di conferencias acerca de la obra que acababa de terminar. Era la primera vez que la mayoría de participantes había oído hablar del Programa Langlands, y parecían intrigados por él. Cuando recuerdo aquellos días, me asombra cuánto han cambiado las cosas. Hoy en día el Programa Langlands se considera una piedra angular de las matemáticas modernas y se le conoce ampliamente en diversas disciplinas.

También fue la primera vez que tuve la oportunidad de viajar por el mundo. Estaba descubriendo diferentes culturas y cómo las matemáticas, nuestro lenguaje común, nos unían. Todo era nuevo y fascinante, y el mundo, un caleidoscopio de infinitas posibilidades.

Capítulo 16
Dualidad cuántica

Ya hemos visto al Programa Langlands resonar a través de despachos matemáticos,[xxv] de la teoría de números a las curvas sobre cuerpos finitos a las superficies de Riemann. Incluso las representaciones de álgebras Kac-Moody se han incorporado a la mezcla. A través de la lente del Programa Langlands observamos los mismos patrones, los mismos fenómenos, en estos diversos campos matemáticos. Se manifiestan de diferentes maneras, pero se pueden reconocer ciertos rasgos en común, como la aparición del grupo dual Langlands. Apuntan a la existencia de una misteriosa estructura subyacente (podríamos llamarla el código fuente) en todas las matemáticas. Es en este sentido en el que hablamos del Programa Langlands como de una Teoría de la Gran Unificación de las matemáticas.

Hemos visto también algunos de los conceptos más comunes e intuitivos de matemáticas que estudiamos en la escuela: números, funciones, ecuaciones… retorcidos, deformados, a veces hechos añicos. Muchos han demostrado no ser ni de lejos tan fundamentales como parecían. En las matemáticas modernas hay conceptos e ideas más profundos y versátiles: espacios vectoriales, grupos de simetrías, aritméticas de módulo números primos, haces… De modo que hay más en las matemáticas que lo que se aprecia a simple vista, y es el Programa Langlands el que nos permite comenzar a ver lo que no veíamos antes. Hasta ahora sólo hemos sido capaces de captar destellos de esa realidad oculta. Y ahora, como arqueólogos que se enfrentan a un mosaico fracturado, intentamos poner en común las pruebas que hemos recogido. Cada nueva pieza del puzle nos proporciona nuevas ideas, nuevas herramientas para desentrañar el misterio. Y cada vez nos asombra la aparentemente inagotable

---

[xxv] El original, «reverberate through chambers of mathematics», parecería una alusión a los *Cuentos de la Alhambra*, de Washington Irving, concretamente el titulado «Las habitaciones misteriosas»: «Llamé, mas nadie contestó, y el ruido pareció repercutir a través de las desiertas cámaras» (en traducción de Ricardo Villa-Real, Ed. Miguel Sánchez, Granada, 1991). (*N. del t.*).

riqueza de la imagen que va surgiendo.

Encontré mi punto de entrada a este mundo mágico cuando Drinfeld conectó mi trabajo en las álgebras Kac-Moody con el Programa Langlands. Este amplio tema, y su omnipresencia en las matemáticas, me han fascinado desde entonces. Me vi abocado a aprender más y más acerca de las varias líneas del Programa Langlands que se tocan en este libro, y desde entonces la mayor parte de mi investigación se ha efectuado en el Programa Langlands o se ha inspirado en él de alguna manera. Esto me ha obligado a visitar muchos continentes matemáticos y aprender diferentes culturas y lenguajes.

Como todo viajero, era evidente que lo que conociera me iba a sorprender. Y ahora viene una de las mayores sorpresas: resulta que el Programa Langlands está también inextricablemente vinculado a la física cuántica. La clave es la dualidad, tanto en la física como en las matemáticas.

Puede que parezca extraño buscar una dualidad en la física, pero en cierto sentido es un concepto con el que estamos ya familiarizados. Pongamos el ejemplo de la electricidad y el magnetismo. Aunque ambas fuerzas aparentan ser completamente diferentes, en realidad una sola teoría matemática las describe, la del electromagnetismo. Esta teoría posee una dualidad oculta que intercambia fuerzas eléctricas y magnéticas (hablaremos de ella con detalle más adelante). En la década de 1970, los físicos intentaron generalizar esta dualidad a las teorías llamadas de campo de gauge (o teorías de gauge) no abelianas. Se trata de las teorías que describen las fuerzas nucleares: la «fuerte», que mantiene a los quarks dentro de los protones, neutrones y otras partículas elementales; y la «débil», responsable de cosas como la radiactividad.

En el núcleo de toda teoría de gauge hay un grupo de Lie, al que se llama *grupo de gauge*. La del electromagnetismo es, en esencia, la más sencilla de las teorías de gauge, y el grupo de gauge es, en este caso, nuestro viejo conocido el grupo circular (el grupo de rotaciones de cualquier objeto redondo). Este grupo es abeliano, es decir: la multiplicación de dos elementos cualesquiera no

depende del orden en que se tomen los valores: $a \cdot b = b \cdot a$. Pero en las teorías de las interacciones fuerte y débil, los grupos de gauge correspondientes son no abelianos, es decir, $a \cdot b = b \cdot a$ en el grupo de gauge. De modo que las llamamos teorías no abelianas de gauge.

Ahora bien, en la década de 1970 los físicos descubrieron que había un análogo de la dualidad electromagnética en las teorías no abelianas de gauge, si bien con un giro sorprendente. Resultaba que si comenzábamos con la teoría de gauge cuyo grupo de gauge es G, la teoría dual sería la teoría de gauge con otro grupo de gauge. Y, ¡oh, maravilla!: el grupo resultó no ser otro que ¡el grupo Langlands dual L_G, ingrediente clave del programa Langlands!

Piense en ello de esta manera: las matemáticas y la física son como dos planetas diferentes, la Tierra y Marte, por ejemplo. En la Tierra descubrimos una relación entre continentes diferentes. Bajo esta relación, asociamos a cada persona en Europa con una persona en Norteamérica: sus alturas, pesos y edades son iguales. Pero tienen sexos opuestos (es como intercambiar un grupo de Lie y su grupo Langlands dual). Y entonces, un día, recibimos a un visitante de Marte que nos dice que en Marte han descubierto una relación entre sus continentes. Resulta que se puede vincular a cada marciano de uno de sus continentes con otro de otro continente distinto, de tal manera que coincidan en altura, pesos y edad, pero... con sexos opuestos (¿quién hubiera dicho que los marcianos tuvieran dos sexos, como nosotros?). No podemos creer lo que estamos oyendo: parecería que la relación que tenemos en la Tierra y la que tenemos en Marte están, de algún modo, conectadas. Pero ¿por qué?

De igual modo, dado que el grupo Langlands dual aparece tanto en las matemáticas como en la física, es normal asumir que hay alguna relación entre el Programa Langlands en las matemáticas y la dualidad electromagnética en la física. Pero durante casi treinta años nadie fue capaz de hallarla.



Hablé de esto en varias ocasiones, a lo largo de los años, con Edward Witten. Witten, profesor del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, está considerado uno de los físicos teóricos vivos más importantes. Una de sus sorprendentes cualidades es su capacidad para emplear los aparatos más sofisticados de física cuántica a fin de realizar sorprendentes descubrimientos y conjeturas en matemáticas puras. Su obra ha inspirado a varias generaciones de matemáticos, y fue el primer físico en ganar la Medalla Fields, uno de los premios más prestigiosos en matemáticas.

Curioso en cuanto a un posible vínculo entre las dualidades cuánticas y el Programa Langlands, Witten me preguntaba por este de vez en cuando.

Hablábamos de ello en mi despacho en Harvard cuando venía de visitante a Harvard o al MIT, o en su despacho en Princeton cuando yo acudía allí. Los debates eran siempre muy estimulantes, pero nunca iban demasiado lejos. Era evidente que faltaban algunos elementos fundamentales, aún por descubrirse. Obtuvimos ayuda de una fuente inesperada.

En una conferencia en Roma, en mayo de 2003,[146] recibo un correo electrónico de mi viejo amigo y colega Kari Vilonen. Originario de Finlandia, Kari es uno de los matemáticos más sociables que conozco. Cuando llegué por primera vez a Harvard, él y su futura esposa, Martina, me llevaron a un *pub* en Boston a ver un partido de béisbol de los Red Sox. Los Sox perdieron, pero ¡fue una experiencia tan memorable! Hemos sido amigos desde entonces, y años después fuimos coautores de varios artículos acerca del Programa Langlands (junto a otro matemático, Dennis Gaitsgory). Para ser exactos, juntos demostramos un caso importante de la relación Langlands.

En su correo, Kari (por entonces profesor en la Universidad Northwestern) me contaba que había contactado con gente de DARPA que quería concedernos una subvención para apoyar la investigación en el Programa Langlands.

DARPA son las iniciales en inglés de la Agencia para la Investigación de Proyectos Avanzados de Defensa, la rama de investigación del Departamento de Defensa estadounidense. Se creó en 1958, a la estela del lanzamiento del *Sputnik*, con la misión de potenciar la ciencia y la tecnología en Estados Unidos y evitar el tipo de sorpresas tecnológicas que representaba el *Sputnik*.

Leí el siguiente párrafo en la página web de DARPA:[147]

> *Para cumplir su misión, la Agencia se apoya en diferentes expertos a fin de aplicar enfoques multidisciplinares, tanto para el avance científico, a través de investigación básica, como para crear innovadora tecnología enfocada a problemas prácticos actuales, a través de investigación aplicada. Las investigaciones científicas de DARPA abarcan desde el trabajo de laboratorio hasta demostraciones de tecnología a escala real... Como primer*

motor de investigación del DoD, DARPA desarrolla proyectos finitos en el tiempo pero capaces de crear cambios duraderos y revolucionarios.

A lo largo de los años, DARPA había financiado numerosos proyectos en matemáticas aplicadas e informática; fue responsable, por ejemplo, de la creación de ARPANET, la progenitora de Internet. Pero, hasta donde yo sabía, no financiaba proyectos de matemáticas puras. ¿Por qué querrían apoyar investigaciones en torno al Programa Langlands?

El área parecía ser pura y abstracta, sin aplicaciones inmediatas. Pero debemos darnos cuenta de que la investigación científica fundamental conforma la base de todo progreso tecnológico. A menudo, los descubrimientos aparentemente más abstractos y abstrusos en matemáticas y física han llevado a innovaciones que empleamos en nuestra vida cotidiana. Piense, por ejemplo, en la aritmética de módulo números primos. Cuando la vemos por primera vez, nos resulta tan abstracta que parece imposible que algo así pueda tener aplicaciones en el mundo real. Incluso el matemático inglés G. H. Hardy aseveró que «una gran parte de las matemáticas más elevadas es inútil». [148]

Sin embargo, fue él quien se llevó la sorpresa: muchos resultados aparentemente esotéricos en teoría de números (el campo en que era experto) son hoy omnipresentes en, por poner un ejemplo, la banca *online*. Cuando efectuamos compras *online*, la aritmética de módulo *N* se pone en funcionamiento (véase la descripción del algoritmo de encriptación RSA en la nota 7 del capítulo 14). No deberíamos prejuzgar nunca el potencial de una fórmula o idea matemática de cara a soluciones prácticas.

La Historia demuestra que todas las tecnologías revolucionarias estuvieron precedidas, con décadas de antelación, por avances en investigación pura. Por tanto, si limitamos el apoyo a la ciencia básica, limitamos nuestro progreso y nuestro poder.

Hay también otro aspecto en todo esto: nuestra investigación científica e

innovación nos definen, en gran medida, como sociedad. Forman parte importante de nuestra cultura y de nuestro bienestar. Robert Wilson, el primer director del Laboratorio Nacional Fermi, en el que se creó el mayor acelerador de partículas de su época, lo expresó cuando testificó en el Comité Conjunto del Congreso sobre Energía Atómica, en 1969. Cuando le preguntaron si su máquina, de miles de millones de dólares, podía contribuir a la seguridad del país, dijo:[149]

> *Sólo desde un punto de vista a largo plazo, el de una tecnología en desarrollo. En cualquier caso, está muy relacionado con la siguiente pregunta: ¿somos buenos pintores, buenos escultores, buenos poetas? Quiero decir, todas esas cosas que veneramos y que honramos en nuestro país, y que nos hacen ser tan patrióticos. En ese sentido, este nuevo conocimiento tiene todo que ver con el honor y el país, pero no tiene nada que ver directamente con defender nuestra nación, excepto hacer que valga la pena defenderla.*

Anthony Tether, que fue director de DARPA de 2001 a 2009, reconocía la importancia de la investigación básica. Pidió a sus gestores de programas que encontraran un buen proyecto de matemáticas puras. Uno de los gestores, Doug Cochran, se tomó la petición en serio. Tenía un amigo en la Fundación Nacional para la Ciencia (NSF), llamado Ben Mann. Ben, especialista en topología, había abandonado su puesto académico y había acudido a Washington para servir como director de programas de la División de Ciencias Matemáticas de la NSF.

Cuando Doug le pidió que le sugiriese un proyecto que valiese la pena en matemáticas puras, Ben pensó en el Programa Langlands. Pese a no ser el área en que era experto, pudo ver su importancia, a juzgar por las propuestas de subvención en esta área enviadas a la NSF. La calidad de los proyectos y el hecho de que las mismas ideas se propagasen por distintas disciplinas

matemáticas le impresionaron.

De modo que Ben sugirió a Doug que DARPA apoyase la investigación en el Programa Langlands, y es por eso por lo que nos contactaron a Kari, a mí y a otros matemáticos, pidiéndonos que escribiéramos una propuesta que Doug presentaría al director de DARPA. Lo que se esperaba era que si el director lo aprobaba, recibiríamos una multimillonaria subvención a la investigación directa en esta área.

Con toda sinceridad, al principio dudamos. Era territorio incógnito: que nosotros supiéramos, ningún matemático había recibido anteriormente subvenciones de esta magnitud. Por norma general, los matemáticos reciben subvenciones individuales relativamente pequeñas de la NSF (un poco de dinero para viajes, apoyo para estudiantes de doctorado, quizá algo de apoyo para el verano). Aquí tendríamos que coordinar el trabajo de decenas de matemáticos con el objetivo de realizar un trabajo colectivo en una vasta área de investigación. Dado que la subvención era tan grande, estaríamos sujetos a un escrutinio público mucho mayor, y probablemente a cierto grado de celos y envidias por parte de nuestros colegas. Nos dimos cuenta de que si el proyecto no generaba un progreso significativo seríamos ridiculizados, y que un fracaso así podría cerrar la puerta a proyectos dignos de subvenciones en matemáticas puras por parte de DARPA.

Pese a nuestras dudas, queríamos hacer historia en el Programa Langlands. Y la idea de sustituir el esquema tradicional y conservador de financiación a la investigación matemática por una gran inyección de fondos en un área prometedora sonaba atractiva y fascinante. Sencillamente, no nos podíamos negar.

La siguiente pregunta era sobre qué deberíamos centrarnos en nuestro proyecto. El Programa Langlands, como hemos visto, es multifacético e implica muchos campos de las matemáticas. Debería resultar fácil escribir media docena de propuestas acerca del tema en general. Teníamos que elegir, y decidimos centrarnos en el que pensamos que era el mayor misterio de todos:

el potencial vínculo entre el Programa Langlands y las dualidades en física cuántica.

Una semana después, Doug presentaba nuestra propuesta al director de DARPA, y, según todo el mundo, fue un éxito. El director aprobó una subvención multimillonaria para el proyecto por un período de tres años. Era, hasta donde sabíamos, la subvención más grande jamás concedida hasta aquel momento a investigación de matemáticas puras. Obviamente, las expectativas eran altas. Fue un momento de gran entusiasmo, pero también de cierta ansiedad.

Por suerte para nosotros, Ben Mann pasó de la NSF a DARPA para convertirse en el gestor de programas a cargo de nuestro proyecto. Desde nuestra primera reunión con él vimos que Ben estaba cualificado como nadie para el trabajo. Tiene la visión y el valor de asumir las riendas de un proyecto de alto riesgo y alta recompensa, hallar la gente adecuada para llevarlo a cabo y ayudarles a desarrollar al máximo sus ideas. Y su entusiasmo, contagioso, da energías a todos los que le rodean. Fuimos realmente afortunados por tener a Ben al timón. No habríamos conseguido una fracción de lo que conseguimos sin su guía y apoyo.

Como prioridad en el asunto, escribí un correo electrónico a Edward Witten contándole de nuestra subvención y preguntándole si estaba interesado en unirse a nosotros. Dada la posición única de Witten en física y matemáticas, teníamos que tenerlo a bordo. Lamentablemente, la primera reacción de Witten fue bastante evasiva. Nos felicitó por la subvención, pero también dejó claro que estaba trabajando en muchos proyectos, y que no deberíamos contar con su participación.

Pero, en un golpe de suerte, Peter Goddard, uno de los físicos que descubrieron la dualidad electromagnética en teorías de gauge no abelianas, iba a convertirse en director del Instituto de Estudios Avanzados en Princeton. Su última investigación versaba sobre temas relacionados con la teoría de representación de álgebras Kac-Moody, y debido a ello había coincidido con

Peter en varias conferencias.

Recordaba uno de esos momentos especialmente bien: fue en agosto de 1991 y nos encontrábamos en un gran taller sobre matemáticas y física cuántica en la Universidad de Kioto, en Japón. En medio del taller, recibimos la noticia de un golpe de estado en la Unión Soviética. Parecía que el régimen autoritario volvía al poder y que pronto se acabarían las limitadas libertades de la *perestroika*. Esto significaba que las fronteras volverían a quedar selladas y de que había una posibilidad muy real de que yo no volviera a ver a mi familia durante años. Mis padres me llamaron inmediatamente para decirme que, si eso ocurría, no me preocupara por ellos y que, de ningún modo, intentara regresar a Rusia. Cuando nos despedimos, nos preparamos para lo peor. Ni siquiera estaba claro que pudiéramos volver a hablar por teléfono en el futuro cercano.

Fueron días tumultuosos. Una noche, mi buen amigo y físico Fedya Smirnov y yo nos encontrábamos en el *lounge* de uno de los hoteles, viendo la televisión japonesa e intentando averiguar qué ocurría en Moscú.

De repente, a eso de las 03.00, Goddard apareció por el vestíbulo con una botella de Glenfiddich en la mano. Nos preguntó sobre las últimas noticias y tomamos una copa. Después regresó a la cama, pero insistió en que nos quedáramos la botella… un bonito gesto de apoyo.

Al día siguiente el golpe de estado fue abortado, para gran alivio nuestro. Una foto con Borya Feigin (quien también estaba en esta conferencia) y yo sonriendo y levantando nuestros puños acabó en la portada de *Yomiuri*, uno de los diarios japoneses más importantes.

En mi correo electrónico a Peter le recordaba ese episodio y le hablaba de nuestra subvención de DARPA. Le sugerí organizar una reunión en el Instituto de Estudios Avanzados para juntar a físicos y matemáticos y hablar del Programa Langlands y las dualidades en física, a fin de intentar hallar terreno común y poder resolver juntos el enigma.

La respuesta de Peter fue la mejor que podía esperar: ofreció su pleno apoyo

para la organización de la reunión.

El Instituto era el lugar ideal para una reunión así. Creado en 1930 como centro independiente de investigación y pensamiento, había albergado a Albert Einstein (quien había pasado en él los últimos veinte años de su vida), André Weil, John von Neumann, Kurt Gödel y otros eminentes científicos. La facultad actual es igual de impresionante: incluye al propio Robert Langlands, quien ha sido profesor allí desde 1972 (hoy en día, emérito), y a Edward Witten. Otros dos físicos de la facultad, Nathan Seiberg y Juan Maldacena, trabajan en áreas de la física cuántica íntimamente relacionadas, y varios matemáticos como Pierre Deligne y Robert MacPherson realizan investigaciones en temas vinculados al Programa Langlands.

Mi intercambio de correos electrónicos con Goddard generaron planes para una reunión exploratoria para principios de diciembre de 2003. Ben Mann, Kari Vilonen y yo iríamos a Princeton, y Goddard prometió participar. Invitamos a Witten, Seiberg y MacPherson; otro matemático de Princeton, Mark Goresky, que cogestionaba el proyecto con Kari y conmigo, se nos uniría. (También invitamos a Langlands, Maldacena y Deligne, pero estarían de viaje y no podrían asistir).

Se fijó el principio de la reunión para las 11.00 en la sala de conferencias situada junto a la cafetería del Instituto. Ben, Kari y yo llegamos pronto, unos quince minutos antes de la reunión. No había nadie. Conforme caminaba inquieto por la habitación, no dejaba de preguntarme: «¿Vendrá Witten?». Era el único de los invitados que no había confirmado su participación.

Cinco minutos antes de la hora se abrió la puerta. ¡Era Witten! En ese momento supe que algo bueno iba a salir de todo aquello.

Unos minutos más tarde llegaron los demás participantes. Nos sentamos en torno a una mesa redonda. Tras los saludos iniciales y las charlas triviales, se hizo el silencio. Todos me miraban.

—Gracias por acudir —comencé—. Durante un tiempo se ha sabido que el Programa Langlands y la dualidad electromagnética tienen algo en común.

Pero la comprensión exacta de qué ocurre nos ha estado eludiendo, pese a numerosos intentos. Creo que ha llegado el momento de desvelar este misterio. Y ahora tenemos los recursos necesarios porque hemos recibido una generosa subvención de DARPA para la investigación en esta área.

La gente, en torno a la mesa, asentía. Peter Goddard preguntó:

—¿Cómo propones hacerlo?

Antes de la reunión, Kari, Ben y yo habíamos previsto diferentes situaciones, de modo que yo iba preparado.

—Sugiero que organicemos una reunión aquí, en el Instituto. Invitaremos a físicos que trabajen en áreas relacionadas y organizaremos conferencias de matemáticos para explicar hasta dónde llegan hoy en día nuestros conocimientos acerca del Programa Langlands. Luego, debatiremos posibles vínculos con la física cuántica.

En aquel momento todos los ojos se fijaron en Witten, el decano de la física cuántica. Su reacción era crucial.

Alto y físicamente imponente, Witten desprende un gran poder intelectual, hasta el punto en que muchos se sientes intimidados ante él. Cuando habla, sus frases son precisas y claras hasta el extremo; parecen compuestas de una lógica inquebrantable. Nunca duda ni hace una pausa para pensar en su respuesta. En esas ocasiones, lo que hace es cerrar los ojos e inclinar hacia delante su cabeza. Es lo que hizo en aquel momento.

Todos esperábamos impacientes. Debía haber pasado menos de un minuto, pero me pareció una eternidad. Finalmente, Witten dijo:

—Me parece una buena idea. ¿Qué fechas tienes pensadas para la reunión?

Ben, Kari y yo no pudimos evitar cruzar nuestras miradas. Witten estaba a bordo, y era una gran victoria para nosotros.

Tras un breve debate hallamos fechas que se adecuaban a todo el mundo: del 8 al 10 de marzo de 2004. Luego alguien preguntó quiénes serían los participantes y oradores. Mencionamos unos cuantos nombres y acordamos finalizar la lista por correo electrónico y enviar las invitaciones en breve. Tras

esto, se levantó la sesión. No nos llevó más de quince minutos.

No es necesario decir que Ben, Kari y yo estábamos muy satisfechos. Witten prometió ayudar a organizar la reunión (lo que, evidentemente, sería un gran atractivo para los invitados) y participar activamente en ella. También esperábamos que Langlands tomase parte en ella, así como otros físicos y matemáticos del Instituto interesados en el tema. Nuestro primer objetivo se había conseguido.

A lo largo de los días siguientes finalizamos la lista de participantes, y una semana después salieron las invitaciones. La carta decía:

> *Le escribimos para invitarle a participar en un taller informal acerca del Programa Langlands y la Física que tendrá lugar en el Instituto de Estudios Avanzados entre los días 8 y 10 de marzo de 2004. El objetivo de este taller es presentar a los físicos los últimos descubrimientos en el Programa Langlands geométrico con el interés de explorar potenciales conexiones entre este tema y la teoría cuántica de campos. Se realizarán varias conferencias por parte de matemáticos y habrá suficiente tiempo para debates informales. Este taller está apoyado por una subvención de DARPA.*

Por norma general, este tipo de conferencias tiene entre cincuenta y cien participantes. Lo que suele ocurrir es que los oradores dan sus conferencias mientras todo el mundo escucha respetuosamente. En el mejor de los casos, al finalizar la conferencia un par de participantes hacen preguntas, y unos cuantos más hablan con el conferenciante al acabar. Nosotros queríamos algo completamente diferente: una sesión dinámica, más una sesión de *brainstorming* que la típica conferencia. Por ello queríamos que fuera una reunión pequeña, de unas veinte personas. Esperábamos que este formato fomentara la interacción y la libre conversación entre participantes.

Ya habíamos tenido nuestra primera reunión con ese formato en noviembre de

2003, en la Universidad de Chicago. Había un pequeño grupo de matemáticos invitados, entre ellos Drinfeld y Beilinson (ambos habían aceptado puestos de profesor en la Universidad de Chicago unos años atrás). Aquella reunión había sido un éxito, y nos demostró que aquel formato funcionaba.

Decidimos que Kari, Mark Goresky y yo hablaríamos, así como mi antiguo alumno de doctorado, David Ben-Zvi, por entonces profesor en la Universidad de Texas de Austin. Dividimos el material en cuatro partes, que cada uno de nosotros presentaría. En cada presentación teníamos que transmitir las ideas principales del Programa Langlands a los físicos que no estuvieran familiarizados con el tema. No era una tarea fácil.



Foto de Shane Lear. Biblioteca fotográfica de la NOAA.

Para prepararme para la conferencia, quise aprender más acerca de la dualidad electromagnética. Todos conocemos las fuerzas eléctrica y magnética. La fuerza eléctrica es lo que hace que objetos eléctricamente cargados se atraigan o repelan entre sí en función de si sus cargas tienen signos idénticos u

opuestos. Por ejemplo, un electrón tiene carga eléctrica negativa, y un protón, positiva (la carga de signo opuesto). La fuerza de atracción entre ambos es lo que hace al electrón orbitar en torno al núcleo del átomo. Las fuerzas eléctricas crean lo que se conoce como campo eléctrico. Todos los hemos visto en acción durante un relámpago, que está causado por el movimiento de una masa de aire cálida y húmeda a través de un campo eléctrico.

La fuerza magnética tiene un origen distinto. Es la fuerza creada por imanes o por partículas eléctricamente cargadas en movimiento. Un imán tiene dos polos: norte y sur. Si colocamos dos imanes con sus polos opuestos uno frente al otros, se atraen, mientras que si los polos enfrentados son idénticos, se repelen. La Tierra es un imán gigante, y aprovechamos la fuerza magnética que ejerce cuando empleamos una brújula. Todo imán crea un campo magnético, como podemos ver claramente en la imagen inferior.

En la década de 1860, el físico británico James Clerk Maxwell ideó una exquisita teoría matemática de los campos eléctricos y magnéticos. Los describía mediante una serie de ecuaciones diferenciales que hoy en día llevan su nombre. Seguramente esperará que esas ecuaciones sean largas y complejas, pero en realidad son bastante sencillas: sólo hay cuatro de ellas, y son sorprendentemente simétricas. Resulta que si consideramos la teoría en el vacío (es decir, sin materia presente) e intercambiamos los campos magnéticos y eléctricos entre sí, el sistema de ecuaciones no cambiará.[150] Por decirlo de otra manera: el intercambio de campos es una simetría de las ecuaciones. Se le llama dualidad electromagnética. Esto significa que la relación entre los campos eléctrico y magnético es simétrica: cada uno de ellos afecta al otro de la misma manera.

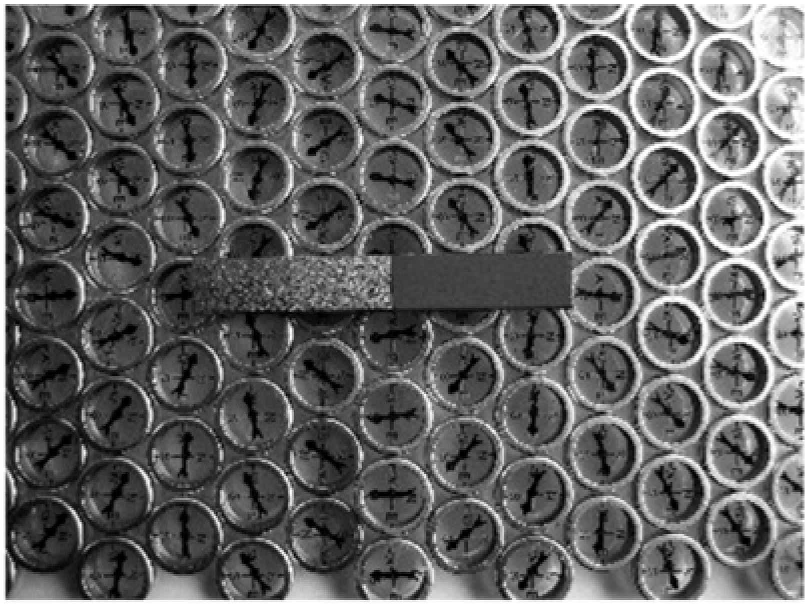


Foto de Dayna Mason[151]]

Ahora bien: las bellas ecuaciones de Maxwell describen el electromagnetismo *clásico*, en el sentido de que esta teoría funciona bien a grandes distancias y bajos niveles de energía. Pero a distancias cortas y altos niveles de energía, el comportamiento de estos campos lo describe la teoría *cuántica* del electromagnetismo. En la teoría cuántica, son los fotones, unas partículas elementales que interactúan con otras partículas, los que transportan estos campos. A esta teoría se le llama teoría cuántica de campos.

Para evitar confusiones, quiero resaltar que el término «teoría cuántica de campos» tiene dos connotaciones diferentes: en un sentido amplio, significa el lenguaje matemático general que se emplea para describir el comportamiento e interacción de partículas elementales, pero puede referirse también a un modelo en especial de este comportamiento, por ejemplo, el electromagnetismo cuántico es una teoría cuántica de campos en este último sentido. Nosotros emplearemos el término, sobre todo, en este último sentido. En cualquier teoría (o modelo) así, algunas partículas (como los electrones o los quarks) son las piezas fundamentales de la materia, y otras (como los fotones) son los conductos de fuerzas. Cada partícula tiene varias

características: algunas familiares, como masa o carga eléctrica, y otras menos familiares, como el «espín». Por tanto, una teoría cuántica de campos es una receta para mezclarlos.

En realidad, la palabra «receta» nos señala una útil analogía: piense en una teoría cuántica de campos como en una receta culinaria. Los ingredientes del plato que estamos preparando son análogos de partículas, y la manera en que las mezclamos es como la interacción entre esas partículas.

Por ejemplo, veamos la receta de la tradicional sopa *borscht*, un plato típico en mi país de origen. Mi madre prepara la mejor (¡por supuesto!). Su aspecto es este (la foto la tomó mi padre):



Evidentemente, he de guardar el secreto de la receta de mi madre. Pero he aquí una receta que he encontrado *online*:

8 tazas de caldo (de ternera o de verduras)

1 trozo de 450g de pata de ternera con hueso

1 cebolla grande

4 remolachas grandes, peladas

4 zanahorias, peladas

1 patata russet grande, pelada

2 tazas de repollo en tiras

3/4 de taza de eneldo fresco picado

3 cucharadas de vinagre de vino tinto

1 taza de nata agria

Sal

Pimienta

Piense en esto como en el «contenido de partículas» de nuestra teoría cuántica de campos. ¿Qué significaría la dualidad en este contexto? Sencillamente, intercambiar algunos elementos («partículas») por otros de tal manera que el contenido total siga siendo el mismo.

Así es como funcionaría la dualidad:

remolacha → zanahoria

zanahoria → remolacha

cebolla → patata

patata → cebolla

sal → pimienta

pimienta → sal

Todos los demás ingredientes se mantienen en la dualidad, es decir:

caldo → caldo;

pata de ternera → pata de ternera;

etcétera.

Dado que las cantidades de los ingredientes que intercambiamos son las mismas, el resultado será ¡la misma receta! Este es el significado de dualidad. Si, por otra parte, intercambiáramos remolacha por patata, tendríamos una receta diferente: una que tendría cuatro patatas y sólo una remolacha. No la he probado, pero apuesto que sabría fatal.

Debería quedar claro, a partir de este ejemplo, que una simetría en una receta es una propiedad rara, de la que podemos aprender algo acerca del plato. El que podamos intercambiar remolachas por cebollas sin afectar al resultado significa que nuestro *borscht* está bien equilibrado en cuanto a ellos.

Regresemos al electromagnetismo cuántico. Cuando decimos que en esta teoría hay una dualidad, queremos decir que hay una manera de intercambiar las partículas de tal modo que acabamos con la misma teoría que antes. Bajo la dualidad electromagnética queremos que todo «lo eléctrico» se convierta en «lo magnético», y viceversa. De modo que, por ejemplo, un electrón (analogía de la remolacha en nuestra sopa) posee una carga eléctrica, así que se lo debería intercambiar por una partícula que posea carga magnética (la analogía de una zanahoria).

La existencia de tal partícula contradice nuestra existencia cotidiana: ¡un imán tiene siempre dos polos, y no se les puede separar! Si rompemos un imán en dos piezas, cada una de ellas tendrá dos polos.

Sin embargo, los físicos han teorizado la existencia de una partícula magnéticamente cargada, llamada monopolo magnético. El primero en hacerlo fue uno de los fundadores de la física cuántica, Paul Dirac, en 1931. Demostró que si permitimos que le pase algo curioso al campo magnético en la posición del monopolo (es lo que un matemático llamaría una «singularidad» del campo magnético), este adquirirá carga magnética.

Lamentablemente, los monopolos magnéticos no se han observado experimentalmente, así que aún no sabemos si existen en la naturaleza. Si no existen, sencillamente no existirá una dualidad electromagnética exacta en la naturaleza a escala cuántica.

El jurado debate aún si este es o no el caso. Sin embargo, podemos construir una teoría cuántica de campos suficientemente cercana a la naturaleza y que exhiba la dualidad electromagnética. Volviendo a nuestra metáfora culinaria, podemos intentar «cocinar» nuevas teorías que posean dualidades. Podemos cambiar los ingredientes y sus cantidades en recetas ya conocidas,

deshacernos de algunos de ellos, añadir otros extra, etcétera. No necesariamente tenemos que «comernos» estos platos imaginarios. Pero, comestibles o no, puede valer la pena sus propiedades en nuestra cocina imaginaria, es decir, los modelos que podrían describir nuestro universo.

La construcción de modelos «por prueba y error» es un camino por el que se ha ido progresando, en física cuántica, durante décadas, al igual que en el arte culinario. Y la simetría es una poderosa guía empleada para crear estos modelos. Cuanto más simétrico es un modelo, más fácil resulta de analizar.

En este punto, es importante subrayar que hay dos tipos de partículas elementales: fermiones y bosones. Los primeros son los ladrillos esenciales de la materia (electrones, quarks, etc.) mientras que los segundos son las partículas que transportan fuerzas (como los fotones). La huidiza partícula de Higgs, recientemente descubierta en el Gran Colisionador de Hadrones situado bajo Ginebra, es también un bosón.

Hay una diferencia fundamental entre ambos tipos de partículas: dos fermiones no pueden estar en el mismo «estado» simultáneamente, mientras que cualquier cantidad de bosones sí puede. Como su comportamiento es tan radicalmente diferente, durante mucho tiempo los físicos supusieron que toda simetría en una teoría cuántica de campos debía conservar una distinción entre los sectores fermiónico y bosónico, que la naturaleza prohibía que se mezclasen. Pero a mediados de la década de 1970 varios físicos sugirieron lo que parecía una locura: que era posible un nuevo tipo de simetría en que bosones y fermiones se intercambiaran. Se le bautizó *supersimetría*.

Como dijo Niels Bohr, uno de los creadores de la mecánica cuántica, a Wolfgang Pauli, «todos coincidimos en que tu teoría es una locura. La pregunta que nos separa es si es suficiente locura para tener una posibilidad de ser correcta».

En el caso de la supersimetría, aún no sabemos si se da en la naturaleza, pero la idea se ha vuelto popular. La razón es que muchos de los problemas de los que las teorías cuánticas de campos convencionales están plagadas se eliminan

al introducir la supersimetría. Las teorías supersimétricas son generalmente más elegantes y fáciles de analizar.

El electromagnetismo cuántico no es supersimétrico, pero tiene extensiones supersimétricas. Añadimos más partículas, tanto fermiones como bosones, para que la teoría resultante se manifieste supersimétrica.

Sobre todo, los físicos han estudiado la extensión del electromagnetismo con la máxima cantidad posible de supersimetría. Y han demostrado que en esta teoría extendida se da, en efecto, la dualidad electromagnética.

Para resumir, no sabemos si en existe alguna forma de dualidad cuántica electromagnética en el mundo real. Pero sabemos que en una extensión de la teoría, idealizada, supersimétrica, la dualidad electromagnética aparece.

Hay otro aspecto importante de esta dualidad que no hemos tratado. La teoría cuántica de campo de electromagnetismo tiene un parámetro: la carga eléctrica del electrón. Es negativa, de modo que la señalamos como $-e$, donde $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ culombios. Es muy pequeña. La extensión supersimétrica máxima del electromagnetismo tiene un parámetro similar, al que también llamamos e. Si efectuamos la dualidad electromagnética e intercambiamos todo lo eléctrico por todo lo magnético, obtendremos una teoría en que la carga del electrón no será e, sino su inverso, $1/e$.

Si e es pequeño, entonces $1/e$ es grande. Así que si comenzamos con la teoría con una pequeña carga del electrón (como en nuestro mundo), la teoría dual tendrá una carga del electrón grande.

¡Esto es enormemente sorprendente! En términos de nuestra analogía de la sopa, imagine que e es la temperatura de la misma. En tal caso, la dualidad implicaría que intercambiar ingredientes como las remolachas y las zanahorias convertirían un *borscht* frío en uno caliente.

La inversión de e es, en realidad, uno de los aspectos clave de la dualidad electromagnética, con consecuencias de largo alcance. De la manera en que está construida la teoría cuántica de campos, sólo tenemos una buena noción de la misma para valores pequeños de un parámetro como e. Ni siquiera

sabemos, *a priori*, si la teoría tiene sentido con valores grandes de este parámetro. La dualidad electromagnética nos dice que no sólo tiene sentido, sino que, en realidad, es equivalente a la teoría con valores pequeños del parámetro. Es por ello por lo que este tipo de dualidad se considera el Santo Grial de la física cuántica.

Nuestra siguiente pregunta es si la dualidad electromagnética existe para otras teorías cuánticas de campo aparte del electromagnetismo y su extensión supersimétrica.

Además de las fuerzas eléctricas y magnéticas, hay otras tres fuerzas conocidas en la naturaleza: la gravedad, que todos conocemos y experimentamos, y las dos fuerzas nucleares de nombres más bien mundanos, fuerte y débil.

La fuerza nuclear fuerte mantiene a los quarks dentro de partículas elementales como los protones y los neutrones. La fuerza nuclear débil es responsable de varios procesos que afectan a los átomos y partículas elementales, como el llamado desintegración-beta de los átomos (emisión de electrones o neutrinos) y la fusión de hidrógeno, que proporciona energía a las estrellas.

Estas fuerzas parecen ser bastante diferentes. Resulta, sin embargo, que las teorías de las fuerzas electromagnéticas, nuclear fuerte y nuclear débil tienen algo en común: son lo que llamamos teorías de gauge o teorías Yang-Mills, en honor a los físicos Chen Ning Yang y Robert Mills, que publicaron un revolucionario artículo sobre ellas en 1954. Como mencioné al comienzo de este capítulo, las teorías de gauge tienen un grupo de simetrías llamado grupo de gauge. Se trata de un grupo de Lie, un concepto del que hablamos en el capítulo 10. El grupo de gauge de la teoría de electromagnetismo es el grupo que presenté al comienzo mismo de este libro, el grupo circular, también llamado SO(2) o U(1). Se trata del grupo de Lie más sencillo, y es abeliano. Ya sabemos que muchos grupos de Lie son no abelianos, como el grupo SO(3) de rotaciones de una esfera. La idea de Yang y Mills fue construir una

generalización del electromagnetismo en la que el grupo circular se sustituiría por un grupo no abeliano. Resultó que las teorías de gauge con grupos no abelianos describen con precisión las fuerzas nuclear fuerte y nuclear débil.

El grupo de gauge de la teoría de fuerza débil es el grupo llamado SU(2). Se trata del grupo Langlands dual de SO(3) y es el doble de grande (hablamos acerca de ello en el capítulo 15). Al grupo de gauge de la fuerza nuclear fuerte se le denomina SU(3).[152]

De modo que las teorías de gauge proporcionan un formalismo universal que describe tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza (contamos las fuerzas eléctrica y magnética como partes de una misma fuerza de electromagnetismo). Más aún: en los años siguientes se descubrió que no eran tres teorías separadas, sino partes de un todo: existe una teoría, llamada generalmente Modelo Estándar, que incluye las tres teorías como piezas diferentes. Se trata, por tanto, de algo que podríamos denominar «teoría de unificación», algo que Einstein buscó en vano durante los últimos treinta años de su vida (aunque por aquel entonces sólo se conocían dos fuerzas, la gravedad y el electromagnetismo).

Ya hemos hablado extensamente acerca de la importancia de una teoría de unificación en las matemáticas. Por ejemplo, el Programa Langlands es una teoría de unificación en el sentido en que describe una amplia gama de fenómenos en términos similares en diferentes áreas de las matemáticas. La idea de construir una teoría de unificación a partir de tan pocos principios generales como sea posible es especialmente atractiva en física, y es evidente por qué. Nos gustaría alcanzar el entendimiento más completo posible acerca del funcionamiento del universo, y esperamos que la teoría definitiva (si existe) fuera sencilla y elegante.

Sencilla y elegante no significa fácil. Por ejemplo, las ecuaciones de Maxwell son profundas, y cuesta cierto esfuerzo comprender lo que significan. Pero son sencillas en el sentido de que son las más económicas a la hora de expresar la verdad acerca de las fuerzas eléctrica y magnética. También son elegantes.

Como lo son también las ecuaciones gravitatorias de Einstein o las ecuaciones no abelianas de teoría de gauge de Yang y Mills. Una teoría de la unificación las combinaría todas, así como una sinfonía integra sonidos de los diferentes instrumentos.

El Modelo Estándar es un paso en esa dirección, y su confirmación experimental (incluido el reciente descubrimiento del bosón de Higgs) ha sido un triunfo. Sin embargo, no se trata de la teoría definitiva acerca del universo: en primer lugar, no incluye la fuerza de la gravedad, que ha demostrado ser la más huidiza. La teoría de la relatividad general de Einstein nos permite comprender bien cómo funciona la gravedad de modo clásico, es decir, a grandes distancias, pero aún no tenemos una teoría cuántica que se pueda probar experimentalmente que describa la fuerza de gravedad a distancias muy cortas. Incluso si nos centramos en las otras tres fuerzas elementales de la naturaleza, el Modelo Estándar nos deja demasiadas preguntas sin respuesta y no tiene en cuenta una cantidad enorme de materia observada por los astrónomos (la llamada «materia oscura»). De modo que el Modelo Estándar no es sino un esbozo parcial de la sinfonía definitiva.

Una cosa está clara: la partitura final de la sinfonía se escribirá en lenguaje matemático. En realidad, una vez que Yang y Mills publicaron su famoso artículo en el que presentaban las teorías de gauge no abelianas, los físicos descubrieron, sorprendidos, que el aparato matemático necesario para esas teorías lo habían creado décadas atrás los matemáticos, sin referencia alguna a la física. Yang, quien acabaría ganando el premio Nobel, describía su sorpresa con estas palabras:[153]

> *[N]o fue sólo alegría. Fue algo más, algo más profundo. Al fin y al cabo, ¿qué podía ser más misterioso, qué podía ser más sorprendente que darte cuenta de que la estructura del mundo físico está íntimamente vinculada a profundos conceptos matemáticos, conceptos que surgieron de deliberaciones cimentadas tan sólo en la lógica y en la belleza de la forma?*

Albert Einstein expresaba el mismo tipo de admiración cuando se preguntaba:[154]

> *«¿Cómo es posible que las matemáticas, que son, al fin y al cabo, un producto del pensamiento humano, independiente de la experiencia, se adecúe tan admirablemente a los objetos de la realidad?».*

Los conceptos que Yang y Mills emplearon para describir fuerzas de la naturaleza aparecieron antes en las matemáticas porque también eran naturales dentro del paradigma de geometría que los matemáticos estaban creando al seguir la lógica interna del tema. Se trata de un gran ejemplo de lo que otro ganador del premio Nobel, el físico Eugene Wigner, llamó «la poco razonable eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales».[155] Aunque los científicos han estado empleando esta «eficacia» desde hace siglos, su raíz no se comprende todavía demasiado bien. Las verdades matemáticas parecen existir de modo objetivo e independiente tanto del mundo físico como del cerebro humano. No cabe duda de que los vínculos entre el mundo de las ideas matemáticas, la realidad física y la consciencia son profundos y es preciso ir más lejos en esa exploración (hablaremos más de esto en el capítulo 18).

También necesitamos nuevas ideas para poder ir más allá del Modelo Estándar. Una de estas ideas nuevas es la supersimetría. Que exista o no en nuestro universo es objeto de un intenso debate. Hasta ahora no se han descubierto huellas de ella. El experimento es el juez definitivo de una teoría, así que hasta que no se demuestre empíricamente, la supersimetría seguirá siendo un constructo teórico, no importa cuán bella y atractiva resulte la idea. Pero incluso si resulta que la supersimetría no se da en el mundo real, proporciona un cómodo aparato matemático que podemos emplear para construir nuevos modelos de física cuántica. Estos modelos no están tan alejados de los que gobiernan la física del mundo real, pero a menudo resultan mucho más fáciles

de analizar gracias al mayor grado de simetría que exhiben. Esperamos que lo que aprendamos de estas teorías tenga influencia en las teorías realistas de nuestro universo, sin importar que en él la supersimetría exista o no.

Así como la teoría del electromagnetismo tiene una extensión supersimétrica máxima, también la tienen las teorías no abelianas de gauge. Estas teorías supersimétricas se obtienen arrojando más partículas a la mezcla, tanto bosones como fermiones, a fin de alcanzar el equilibrio más perfecto posible entre ellos. Es, por tanto, normal preguntarse: ¿poseen estas teorías un análogo de la dualidad electromagnética?

Los físicos Claus Montonen y David Olive se enfrentaron a esta pregunta[156] a finales de la década de 1970. Profundizando sobre un trabajo previo[157] de Peter Goddard (el futuro director del Instituto de Estudios Avanzados), Jean Nuyts y David Olive llegaron a una sorprendente conclusión: sí, hay una dualidad electromagnética en las teorías no abelianas de gauge, pero estas teorías no son autoduales en general, de la manera en que lo es el electromagnetismo. Como decíamos antes, si sustituimos todo lo eléctrico por todo lo magnético, y viceversa, en el electromagnetismo, obtendremos la misma teoría, pero con la carga del electrón invertida. Pero resulta que si hacemos lo mismo en una teoría de gauge supersimétrica general con un grupo de gauge *G*, obtenemos una teoría *diferente*. Aún será una teoría de gauge, pero con un grupo de gauge diferente (y también con el parámetro invertido, que es el análogo de la carga del electrón).

Y ¿cuál será el grupo de gauge de la teoría dual? Resulta que se trata de ^{L}G, el grupo Langlands dual del grupo *G*.

Goddard, Nuyts y Olive lo descubrieron al realizar un detallado análisis de las cargas magnética y eléctrica de la teoría de gauge con un grupo de gauge *G*. En el electromagnetismo, que es la teoría de gauge cuyo grupo de gauge es el grupo circular, los valores de ambas cargas son enteros. Cuando los intercambiamos, un conjunto de enteros se intercambia por otro conjunto de enteros. Por lo tanto, la teoría no varía. Pero ellos demostraron que, en una

teoría de gauge general, las cargas eléctrica y magnética toman valores en dos conjuntos diferentes. Llamémoslos S_e y S_m. Se pueden expresar matemáticamente en términos del grupo de gauge G (de momento no es importante cómo, exactamente).[158]

Resulta que bajo la dualidad electromagnética, S_e se convierte en S_m y S_m se convierte en S_e. De modo que la pregunta es si existe otro grupo G' para el que S_e sea lo que era S_m para G, y S_m sea lo que era S_e para G (lo que resultaría compatible con ciertos datos adicionales determinados por G y G'). No resultaba evidente que existiera tal grupo G', pero ellos demostraron que existía y proporcionaron una construcción. En aquella época no sabían que Langlands había construido G' una década antes de una manera muy similar, pese a que la motivación de Langlands era otra completamente diferente. Ese grupo G' no era sino el grupo Langlands dual L_G.

Por qué la dualidad electromagnética lleva al mismo grupo Langlands dual que los matemáticos descubrieran en un contexto completamente distinto era la gran pregunta a la que nos íbamos a enfrentar en la reunión en Princeton.

Capítulo 17
Descubriendo conexiones ocultas

A casi de una hora en tren de Nueva York, Princeton parece el típico suburbio del Noreste. El Instituto de Estudios Avanzados, conocido en la comunidad científica como, sencillamente, «*el* Instituto», se encuentra a las afueras de Princeton, literalmente junto al bosque. El área que lo rodea es silenciosa y pintoresca: patos nadando en pequeños estanques, árboles reflejados en aguas quietas. El instituto, una agrupación de edificios de ladrillos, de dos y tres plantas, construido al estilo de la década de 1950, irradia poder intelectual. Uno no puede evitar saborear su rica historia al deambular por los pasillos alfombrados o la biblioteca principal, que Einstein y otros gigantes emplearan.

Era allí donde tuvimos nuestra reunión en marzo de 2004. Pese al escaso margen con que se avisó, la respuesta a las invitaciones enviadas en diciembre fue abrumadoramente positiva. Había unos veinte participantes, de modo que cuando inauguré la reunión, pedí a los asistentes que se fuesen presentando por turnos. Me tenía que pellizcar para creérmelo: Witten y Langlands estaban allí, sentados cerca uno del otro, como David Goddard y varios de sus colegas, tanto de la Facultad de Matemáticas como de la Facultad de Ciencias Naturales. David Olive, uno de los autores de los artículos Montonen-Olive y Goddard-Nuyts-Olive, estaba también presente. Y, por supuesto, Ben Mann nos acompañaba.

Todo transcurrió según el plan. Estábamos explicando, en esencia, la historia que usted ha leído en este libro: los orígenes del Programa Langlands en teoría de números y análisis armónico, el paso a curvas sobre cuerpos finitos y de allí a superficies de Riemann. Dedicamos bastante tiempo explicando la construcción Beilinson-Drinfeld y mi trabajo con Feigin en álgebras Kac-Moody, así como sus vínculos con la teoría cuántica de campos bidimensionales.

A diferencia de una conferencia típica, hubo mucho intercambio entre los

oradores y el público. Fue una reunión intensa, con debates que se alargaron de la clase a la cafetería y nuevamente a la clase.

Durante todo ese tiempo, Witten estuvo muy activo. Sentado en primera fila, escuchaba atentamente y hacía preguntas, interpelando continuamente a los oradores. El tercer día, por la mañana, me dijo: «Me gustaría hablar por la tarde; creo que tengo una idea de lo que está sucediendo».

Tras la comida, realizó un esbozo de una posible conexión entre los dos temas. Fue el comienzo de una nueva teoría que hacía de puente entre las matemáticas y la física, un puente que él y sus colaboradores, y posteriormente muchos otros, han estado investigando desde entonces.

Como habíamos visto, en la tercera columna de la piedra Rosetta de André Weil la versión geométrica del Programa Langlands trata con superficies de Riemann. Todas estas superficies son bidimensionales. Por ejemplo, como vimos en el capítulo 10, la esfera (la superficie de Riemann más sencilla) tiene dos coordenadas: longitud y latitud. Es por ello por lo que es bidimensional. Todas las demás superficies de Riemann son también bidimensionales porque cualquier pequeño entorno de cualquiera de sus puntos tiene el aspecto de parte de un plano bidimensional, de modo que se puede describir mediante dos coordenadas independientes.

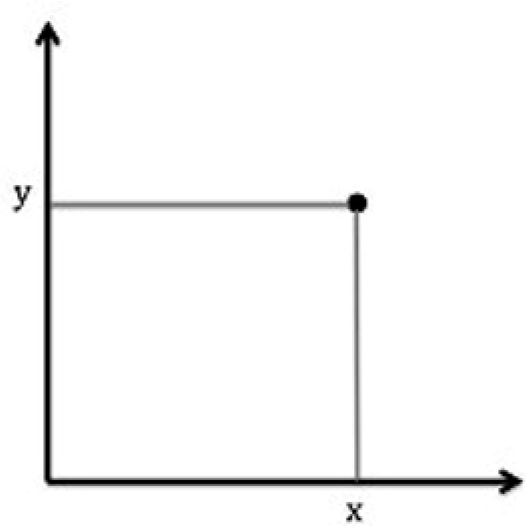
Por otra parte, las teorías de gauge, en las que se observa la dualidad electromagnética, se definen en el espacio-tiempo tetradimensional. A fin de construir un puente hacia las dos, Witten comenzó aplicando una «reducción dimensional» a una teoría de gauge tetradimensional, de cuatro a dos dimensiones.

La reducción dimensional es, en realidad, una herramienta habitual en física: nos aproximamos a un modelo físico dado centrándonos en ciertos ángulos de libertad e ignorando los otros. Por ejemplo, supongamos que vuela usted en avión y un auxiliar de vuelo, de pie en el pasillo, le da a usted un vaso de agua. Supongamos, por simplificar, que el movimiento de la mano del auxiliar de vuelo es perpendicular a la dirección de vuelo del avión. La velocidad del vaso

tiene dos componentes: el primero es la velocidad del avión, y el segundo es la velocidad de la mano del auxiliar de vuelo al pasarle a usted el vaso. Pero la primera es mucho mayor que la segunda, de modo que si tuviéramos que describir el movimiento del vaso de agua desde el punto de vista de un observador estático en el suelo, podríamos ignorar tranquilamente el segundo componente de velocidad y decir sencillamente que el vaso se mueve a la misma velocidad que el avión. Por tanto, podemos reducir un problema bidimensional, que implica dos componentes de velocidad, a un problema unidimensional que implica el componente más importante o dominante.

En nuestro contexto, la reducción dimensional se efectúa de la siguiente manera: imaginamos una forma geométrica (o variedad), producto de dos superficies de Riemann. En este caso, «producto» significa que tenemos una nueva forma geométrica cuyas coordenadas son las de cada una de esas superficies unidas.

A modo de ejemplo más sencillo, pensemos en el producto de dos rectas. Cada recta tiene una coordenada, de modo que el producto tendrá dos coordenadas independientes. Por tanto, será un plano: todos los puntos de un plano están representados por dos coordenadas. Estas son las coordenadas de las dos rectas, unidas.



De igual modo, el producto de una recta y una circunferencia es un cilindro. También tiene dos coordenadas: una circular y otra lineal.



Cuando tomamos el producto, las dimensiones se suman. En los ejemplos que acabamos de ver, cada uno de los objetos iniciales es unidimensional, y su producto es bidimensional. He aquí otro ejemplo: el producto de una recta y un plano es el espacio tridimensional: su dimensión es 3 = 1 + 2.

Del mismo modo, la dimensión del producto de dos superficies de Riemann es la suma de sus dimensiones, es decir, 2 + 2, que es 4. Podemos hacer un dibujo de una superficie de Riemann (hemos visto algunas antes) pero no podemos dibujar una variedad tetradimensional, de modo que deberemos estudiarla matemáticamente, con los mismos métodos que empleamos para formas de menos dimensiones, más fáciles de imaginar. Nuestra capacidad para hacer esto constituye un buen ejemplo del poder de la abstracción matemática, como ya vimos en el capítulo 10.

Ahora supongamos que el tamaño de una de las dos superficies de Riemann, llamémosla X, es mucho menor que el de la otra, a la que llamaremos Σ. En tal caso, los grados de libertad efectivos estarán concentrados en Σ, y seremos capaces de describir de manera aproximada la teoría tetradimensional acerca del producto de las dos superficies mediante una teoría sobre Σ, a la que los físicos llaman «teoría efectiva». Esta teoría será, pues, bidimensional. Esta

aproximación será cada vez mejor conforme hagamos *X* cada vez más pequeña, mientras conservemos su forma (esta teoría efectiva dependerá siempre de la forma de *X*). Así, pasamos de la teoría de gauge supersimétrica tetradimensional del producto de *X* y Σ a una teoría bidimensional definida por Σ.

Antes de tratar en detalle la naturaleza de esta teoría, hablemos de lo que queremos decir por teoría cuántica de campos, en general. Por ejemplo, en electromagnetismo estudiamos campos eléctricos y magnéticos en el espacio tridimensional. Cada uno de ellos es lo que los matemáticos llaman un campo vectorial. Una analogía útil resulta la del campo vectorial que describe un patrón de vientos: en cada punto del espacio, el viento sopla en una dirección determinada y con una fuerza propia; esto se representa con una flecha unida a ese punto, a la que los matemáticos llaman vector. El conjunto de estos vectores, unidos a todos los puntos, es un campo vectorial. Todos hemos visto el viento representado como un campo vectorial en mapas del tiempo.

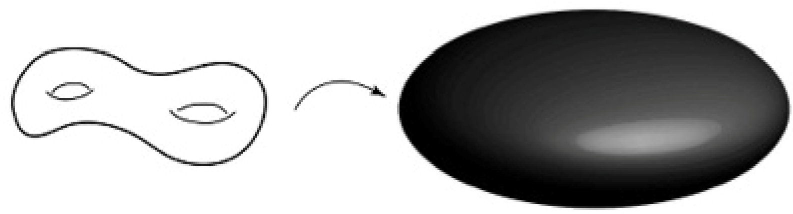
De igual manera, un campo magnético dado posee también una dirección y una fuerza propias en cada punto del espacio, como se puede ver en la imagen de la p. 282. Por lo tanto, se trata también de un campo vectorial. Dicho de otra manera, tenemos una regla que asigna un vector a cada punto de nuestro espacio tridimensional. No es sorprendente, pues, que los matemáticos llamen a esta regla una «aplicación» de nuestro espacio tridimensional al espacio vectorial tridimensional. Y si seguimos los cambios en el tiempo de un campo magnético, obtenemos una aplicación del espacio-tiempo tetradimensional al espacio vectorial tridimensional (es como observar cómo cambia el mapa del tiempo por la TV). De un modo similar, todo campo eléctrico, que cambie en el tiempo, se puede describir como una aplicación de nuestro espacio-tiempo tetradimensional al espacio vectorial tridimensional. El electromagnetismo es una teoría matemática que describe estas dos aplicaciones.

Las únicas aplicaciones que nos interesan en la teoría clásica del electromagnetismo son las que corresponden a soluciones a las ecuaciones de

Maxwell. En cambio, en la teoría cuántica estudiamos *todas* las aplicaciones. De hecho, todo cálculo, en teoría cuántica de campos, implica la suma de todas las aplicaciones posibles, pero cada aplicación tiene un peso, es decir, se multiplica por un factor dado. Estos factores se definen de tal modo que las aplicaciones que corresponden a las soluciones a las ecuaciones de Maxwell realizan la contribución fundamental, pero otras aplicaciones también contribuyen.

Las aplicaciones de espacio-tiempo a espacios multivectoriales aparecen en muchas otras teorías cuánticas de campos (por ejemplo, en teorías de gauge no abelianas). Sin embargo, no todas las teorías cuánticas de campos se basan en vectores. Existe una clase de teorías cuánticas de campos, llamadas *modelos sigma*, en las que consideramos aplicaciones del espacio-tiempo a un espacio geométrico curvo, o variedad. A esta variedad se le denomina variedad objetivo (*target manifold*). Puede ser, por ejemplo, una esfera. Aunque los modelos sigma se comenzaron a estudiar en el caso del espacio-tiempo tetradimensional, un modelo así también tiene sentido si tomamos el espacio-tiempo como una variedad de cualquier dimensión. Así pues, hay un modelo sigma para toda elección de variedad objetivo y toda elección de variedad espacio-tiempo. Por ejemplo, podemos escoger una superficie de Riemann bidimensional como nuestro espacio-tiempo, y al grupo de Lie SO(3) como variedad objetivo. Así, el correspondiente modelo sigma describirá aplicaciones de esta superficie de Riemann en SO(3).

La imagen inferior ilustra ese tipo de aplicación: a la izquierda tenemos una superficie de Riemann; a la derecha, la variedad objetivo, y la flecha representa una aplicación entre ambas, es decir, la regla que asigna un punto en la variedad objetivo a cada punto de la superficie de Riemann.



En el modelo sigma clásico, consideramos aplicaciones del espacio-tiempo a la variedad objetivo que resuelven las ecuaciones de movimiento (las análogas a las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo); a estas aplicaciones se les denomina armónicas. En el modelo sigma cuántico, todas las cantidades que nos interesan, como las llamadas funciones de correlación, se obtienen sumando todas las aplicaciones posibles, todas ellas con un peso asignado, es decir, multiplicadas por un factor dado.

Volvamos a nuestra pregunta: ¿qué teoría cuántica de campos bidimensional describe la reducción dimensional de una teoría de gauge supersimétrica tetradimensional con el grupo de gauge G en $\Sigma \times X$ conforme reescalamos X de tal modo que su tamaño se vuelve muy pequeño? Resulta que esa teoría es una extensión supersimétrica del modelo sigma de aplicaciones de Σ a una variedad objetivo específica M, que está determinada por la superficie de Riemann X y el grupo de gauge G de la teoría de gauge original. Nuestra notación para ella debería reflejar esto, de modo que la denominaremos $M(X,G)$.[159]

Como anteriormente había resultado ser el caso con la teoría de grupos (véase capítulo 2), cuando los físicos tropezaron con estas variedades, descubrieron que los matemáticos habían llegado allí antes que ellos. En realidad, estas variedades tenían un nombre: *espacios de móduli de Hitchin*, por el matemático británico Nigel Hitchin, profesor de la Universidad de Oxford, quien había presentado y estudiado estos espacios a mediados de la década de 1980.

Aunque es evidente por qué un físico podría interesarse por estos espacios (aparecen cuando efectuamos la reducción dimensional de una teoría de gauge tetradimensional), las razones para el interés de un matemático por estos

espacios resulta menos evidente.

Por suerte, Nigel Hitchin nos ha dejado un detallado informe[160] de la historia de su descubrimiento, y se trata de un gran ejemplo del sutil juego entre matemáticas y física. A finales de la década de 1970, Hitchin, Drinfeld y otros dos matemáticos, Michael Atiyah y Yuri Manin, estudiaron las llamadas ecuaciones de instantón, a las que los físicos habían llegado por el estudio de teorías de gauge. Estas ecuaciones de instantón se inscribían en un espacio plano tetradimensional. Posteriormente, Hitchin estudió ecuaciones diferenciales en un espacio plano tridimensional, las llamadas ecuaciones de monopolo, obtenidas a partir de la reducción dimensional de las ecuaciones de instantón de cuatro a tres dimensiones. Estas eran interesantes desde un punto de vista físico, y resultaron poseer una fascinante estructura matemática.

Era, por tanto, natural estudiar las ecuaciones diferenciales obtenidas al reducir las ecuaciones de instantón de cuatro a dos dimensiones. Lamentablemente, los físicos habían visto que estas ecuaciones no poseían soluciones no triviales en el espacio plano bidimensional (es decir, en el plano) de modo que no fueron más allá con ellas. La genialidad de Hitchin, sin embargo, fue que se podían inscribir también estas ecuaciones en cualquier superficie *curva* de Riemann, como un donut o un *pretzel*. Los físicos pasaron esto por alto porque en la época (principios de los años ochenta) no estaban especialmente interesados en las teorías cuánticas de campos o en tales superficies curvadas. Pero Hitchin vio que, matemáticamente, las soluciones en esas superficies eran especialmente ricas. Presentó su espacio de móduli $M(X,G)$ como el espacio de soluciones a esas ecuaciones en una superficie de Riemann X (en el caso de un grupo de gauge G).[xxvi] Halló que se trataba de una variedad notable: para ser exactos, poseía una métrica «hiperKähler», de la que se conocían muy pocos ejemplos en aquella época. Otros matemáticos

[xxvi] Al respecto, Hitchin cita al gran poeta alemán Goethe: «Los matemáticos son como los franceses: todo lo que les digas lo traducen a su idioma, y desde ese momento es algo completamente diferente». (*N. del a.*).

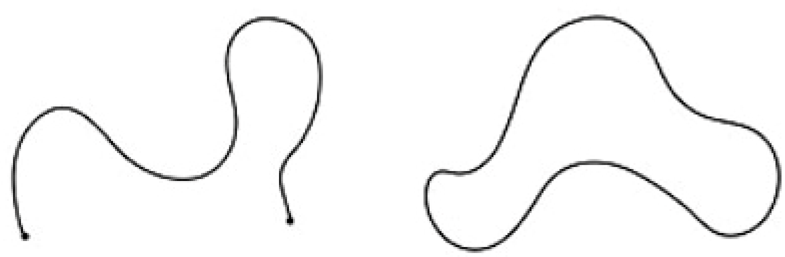
siguieron su camino.

Unos diez años más tarde, los físicos comenzaron a ver la importancia de esas variedades en física cuántica, aunque el interés no se disparó realmente hasta la obra de Witten y sus colaboradores, la que estoy describiendo en este momento. (Es también interesante señalar que los espacios de móduli de Hitchin, que aparecieron originalmente en la columna de la derecha de la piedra Rosetta de Weil, han hallado recientemente aplicaciones en el Programa Langlands en la columna central, en la que el papel de las superficies de Riemann lo desempeñan las curvas sobre cuerpos finitos).[161]

La interacción entre matemáticas y física es un proceso bidireccional, en el que cada una de las disciplinas toma prestado de (y se inspira en) la otra. En momentos diferentes, cada una de ellas puede ir por delante en el desarrollo de una idea en particular, sólo para pasar el testigo a la otra conforme cambia el centro de atención. Pero juntas, interactúan en un círculo virtuoso de influencia recíproca.

Ahora, armados con las reflexiones de físicos y de matemáticos, apliquemos la dualidad electromagnética a la teoría de gauge tetradimensional con el grupo de gauge G. Así obtendremos la teoría de gauge con el grupo de gauge L_G, el grupo Langlands dual de G. (Recordemos que si aplicamos esta dualidad dos veces, obtendremos nuevamente el grupo original G. Por decirlo de otro modo: el grupo Langlands dual de L_G es el propio grupo G). Los modelos sigma bidimensionales efectivos sobre Σ, asociados a G y L_G, serán por lo tanto equivalentes, o duales, uno respecto al otro. Este tipo de dualidad se denomina, en los modelos sigma, *simetría especular*. En uno de los modelos sigma tenemos aplicaciones de Σ al espacio de móduli de Hitchin $M(X,G)$ correspondientes a G; en el otro, aplicaciones de Σ al espacio de móduli de Hitchin $M(X,L_G)$ correspondientes a L_G. Los dos espacios de móduli de Hitchin, y sus modelos sigma, no tienen nada que ver uno con el otro *a priori*, así que la simetría especular entre ellos es tan sorprendente como la dualidad electromagnética de las teorías de gauge originales en cuatro dimensiones.

El interés, por parte de los físicos, en modelos sigma bidimensionales de este tipo está motivado, en parte, por el importante papel que desempeñan en teoría de cuerdas. Como mencioné en el capítulo 10, la teoría de cuerdas postula que los objetos fundamentales de la naturaleza no son partículas elementales en forma de punto (que no poseen geometría interna y son, por tanto, cero-dimensionales) sino objetos unidimensionales denominados cuerdas, que pueden ser abiertas o cerradas. Las primeras tienen dos extremos, mientras que las segundas son pequeños lazos, muy similares a los que vimos en el capítulo 10.

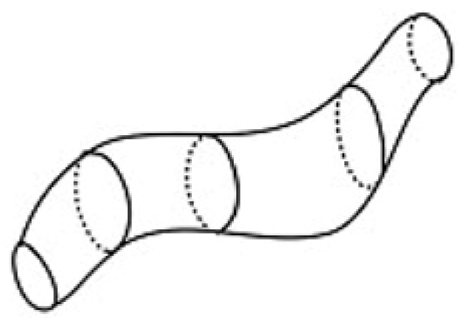


La idea de la teoría de cuerdas es que las vibraciones de estas diminutas cuerdas conforme viajan por el espacio-tiempo crean las partículas elementales y las fuerzas con que interactúan.

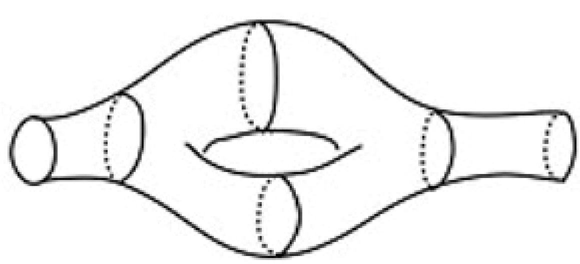
Los modelos sigma entran en la teoría de cuerdas cuando comenzamos a pensar cómo se mueven las cuerdas. En física estándar, cuando una partícula puntual se mueve en el espacio, su trayectoria es un camino unidimensional. Las posiciones de la partícula, en diferentes momentos del tiempo, se representan como puntos en este camino.



Sin embargo, si una cuerda cerrada se mueve, su movimiento crea una superficie bidimensional. Ahora, la posición de la cuerda en cada momento es un lazo en esta superficie.



Las cuerdas pueden también interactuar entre sí: una cuerda puede «dividirse» en dos o más trozos, y esos trozos pueden unirse, como se ve en la siguiente imagen. Esto nos ofrece una superficie de Riemann más general con un número aleatorio de agujeros (y con circunferencias frontera). Se le llama la hoja del mundo de la cuerda.



Esta trayectoria se puede representar como una superficie de Riemann Σ incrustada en el espacio-tiempo *S* y, por tanto, mediante una aplicación de Σ a *S*. Este es precisamente el tipo de aplicaciones que aparece en el modelo sigma de Σ con la variedad objetivo *S*. Sin embargo, ahora las cosas están invertidas: el espacio-tiempo *S* es ahora la variedad objetivo de este modelo sigma, es decir, el receptor de las aplicaciones, no la fuente de estos, en contraste con las teorías cuánticas de campos tradicionales, como la del electromagnetismo.

La idea de la teoría de cuerdas es que efectuando cálculos en estos modelos sigma *y* sumando los resultados sobre todas las posibles superficies de Riemann Σ (es decir, sobre todos los posibles caminos de las cuerdas que se propagan en un espacio-tiempo *S* fijo)[162] podemos reproducir los fenómenos físicos que observamos en el espacio-tiempo *S*.

Lamentablemente, la teoría resultante está llena de graves problemas (en especial, que permite la existencia de taquiones, partículas elementales que se mueven más rápido que la luz, cuya existencia queda prohibida por la teoría de la relatividad de Einstein). La situación mejora drásticamente si pensamos en una extensión supersimétrica de la teoría de cuerdas. Obtenemos entonces lo que se denomina *teoría de supercuerdas*. Pero tenemos un nuevo problema: la teoría de supercuerdas sólo es matemáticamente consistente si nuestro espacio-tiempo *S* tiene diez dimensiones, algo en desacuerdo con el mundo que observamos a diario, con sólo cuatro (las tres dimensiones espaciales y una temporal).

Sin embargo, podría ser que nuestro mundo fuera resultado, de la manera explicada arriba, del espacio-tiempo de dimensión 4 que vemos y una diminuta variedad *M* de dimensión 6, tan pequeña que no podemos verla mediante las herramientas disponibles hoy en día. Si es así, estaríamos en una situación similar a la reducción dimensional (de cuatro a dos dimensiones) de la que hablábamos antes: la teoría de dimensión 10 daría lugar a una teoría efectiva de dimensión 4. La esperanza es que esta teoría efectiva describa nuestro

universo, y, especialmente, que incluya tanto el Modelo Estándar como una teoría cuántica de la gravedad. Esta promesa de potencial unificación de todas las fuerzas conocidas de la naturaleza es la razón principal por la que la teoría de supercuerdas se ha estudiado tan a fondo en los últimos años.[163]

Pero tenemos un problema: ¿qué variedad es esta *M* de dimensión 6?

Para apreciar realmente cuán problemático resulta esto, supongamos, por un instante, que la teoría de supercuerdas fuese matemáticamente coherente en seis dimensiones, en lugar de serlo en diez. En ese caso, sólo habría dos dimensiones extra y deberíamos hallar una variedad *M* bidimensional. No tendríamos tantas elecciones: *M* debería ser una superficie de Riemann, las cuales, como sabemos, se caracterizan por un género, es decir, el número de «agujeros». Es más: para que la teoría funcione, esta *M* ha de satisfacer ciertas propiedades adicionales: por ejemplo, ha de ser lo que se denomina una variedad Calabi-Yau en honor a dos matemáticos, Eugenio Calabi y Shing-Tung Yau, que fueron los primeros en estudiar matemáticamente estos espacios (años antes de que los físicos se interesaran por ellos, he de añadir).[164] La única superficie de Riemann con estas condiciones es el toro. Por lo tanto, si *M* fuese bidimensional, podríamos darlo por solucionado: tendría que ser un toro.[165] Sin embargo, conforme crece la dimensión de *M*, también lo hace el número de posibilidades. Si *M* es de dimensión 6, se estima que hay unas 10^{500} posibilidades, un número inimaginablemente alto. ¿Cuál de estas variedades hexadimensionales se da en nuestro universo y cómo podemos verificarlo experimentalmente? Esta es una de las preguntas clave de la teoría de supercuerdas que todavía no se ha respondido.[166]

En todo caso, de esto lo que debería quedar claro es que los modelos sigma desempeñan un papel crucial en la teoría de supercuerdas y que, de hecho, su simetría especular se puede remontar a una dualidad en la teoría de supercuerdas.[167] Los modelos sigma tienen también aplicaciones más allá de la teoría de cuerdas. Los físicos los han estado estudiando en gran detalle, y no sólo los modelos sigma en que la variedad objetivo *M* es de dimensión 6.[168]

Así, cuando Witten habló en nuestra conferencia de 2004, primero aplicó la técnica de reducción dimensional (de cuatro a dos dimensiones) para reducir la dualidad electromagnética de dos teorías de gauge (con grupos de gauge G y L_G) a la simetría especular de dos modelos sigma (cuyos objetivos eran los espacios de móduli de Hitchin asociados a los dos grupos Langlands duales G y L_G). Y luego preguntó: ¿podemos conectar esta simetría especular al Programa Langlands?

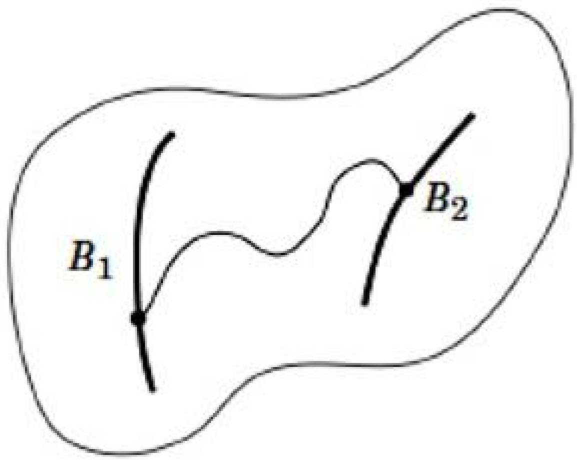
La respuesta que sugirió fue fascinante. Por regla general, en las teorías cuánticas de campos estudiamos algo llamado funciones de correlación, que describen la interacción de partículas. Por ejemplo, una de estas funciones se puede emplear para describir las probabilidades de que una determinada partícula surja de la colisión entre otras dos. Pero resulta que el formalismo de la teoría cuántica de campos es mucho más versátil: además de estas funciones, hay varios objetos más sutiles en la teoría, similares a los «haces» de los que hablamos en el capítulo 14 en relación al diccionario de Grothendieck. A estos objetos se les denomina D-branas o sencillamente «branas».

Las branas tienen su origen en la teoría de supercuerdas, y su nombre es una parasíntesis de «membrana». Las branas surgen de modo natural cuando consideramos el movimiento de cuerdas abiertas en una variedad objetivo M. La manera más sencilla de describir la posición de ambos extremos de una cuerda abierta es estipular que un extremo pertenece a un subconjunto determinado, B_1, de M; y que el otro pertenece a otro subconjunto, B_2. Esto se muestra en el gráfico inferior, en el que la delgada curva representa la cuerda abierta con dos extremos, uno de los cuales está en B_1 y el otro en B_2.

De esta manera, los subconjuntos (o, de modo más apropiado, las subvariedades) B_1 y B_2 se convierten en parte de la teoría de supercuerdas y del correspondiente modelo sigma. Estos subconjuntos son los prototipos de las branas generales que se dan en estas teorías.[169]

La simetría especular entre dos modelos sigma da lugar a una relación entre las

branas de estos dos modelos sigma. La existencia de esta relación la propuso originalmente, a mediados de los años noventa, el matemático Maxim Kontsevich bajo el nombre de «simetría especular homológica». Tanto físicos como matemáticos la han estudiado a fondo, especialmente en la última década.

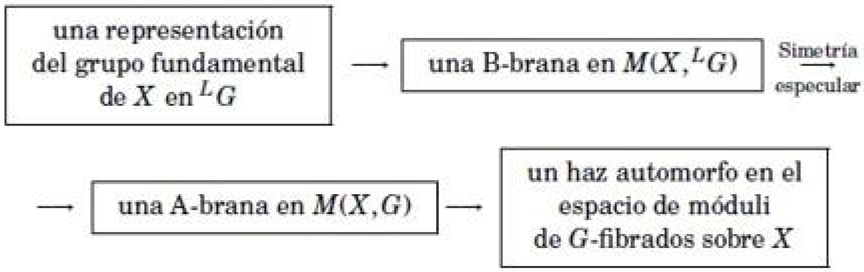


La idea principal de la conferencia de Witten en Princeton era que, precisamente, esta simetría especular homológica debía considerarse equivalente a la relación Langlands.

En este punto es importante señalar que los modelos sigma vienen en dos sabores, llamados «modelo A» y «modelo B». Los dos modelos sigma de que estamos hablando son, en realidad, diferentes: si el que posee la variedad objetivo espacio de móduli de Hitchin $M(X, G)$ es el modelo A, entonces el que tiene la variedad objetivo $M(X,L_G)$ es el modelo B. De acuerdo a ello, las branas de ambas teorías se denominan «A-branas» y «B-branas» respectivamente. Bajo la simetría especular, por cada A-brana en $M(X,G)$ debería haber una B-brana en $M(X,L_G)$, y viceversa.[170]

A fin de establecer la relación geométrica Langlands, necesitamos asociar un haz automorfo a cada representación del grupo fundamental de X en ${}^LG$. He aquí, a grandes rasgos, la manera en que Witten propuso construirla mediante

simetría especular:



Aunque había aún muchos detalles que solventar, la conferencia de Witten fue un acontecimiento: mostraba un sendero claro que seguir para establecer un vínculo entre la dualidad electromagnética y el Programa Langlands. Por una parte, traía al reino de las matemáticas modernas toda una hueste de nuevas ideas que los matemáticos no habían tenido en cuenta (ciertamente no en conexión con el Programa Langlands): las categorías de branas, el papel especial por desempeñar por los espacios de móduli de Hitchin en el Programa Langlands y la conexión entre las A-branas y los haces automorfos. Por otra parte, este vínculo permitía también a los físicos emplear ideas y descubrimientos matemáticos para avanzar en su comprensión de la física cuántica.

A lo largo de los siguientes dos años, Witten trabajó en los detalles de su propuesta, en colaboración con un físico, ruso de nacimiento, del Caltech,[xxvii] Anton Kapustin. Su artículo al respecto, de 230 páginas, apareció en abril de 2006 y causó un gran impacto tanto en la comunidad matemática como en la física. El párrafo de apertura de este artículo[171] describe muchos de los conceptos que hemos tratado en este libro:

El Programa Langlands para cuerpos numéricos unifica muchos resultados clásicos y contemporáneos en teoría de números y en una vasta área de investigación. Tiene un análogo para las curvas sobre cuerpos finitos que ha

[xxvii] Abreviación popular de *California Institute of Technology*.(*N. del t.*).

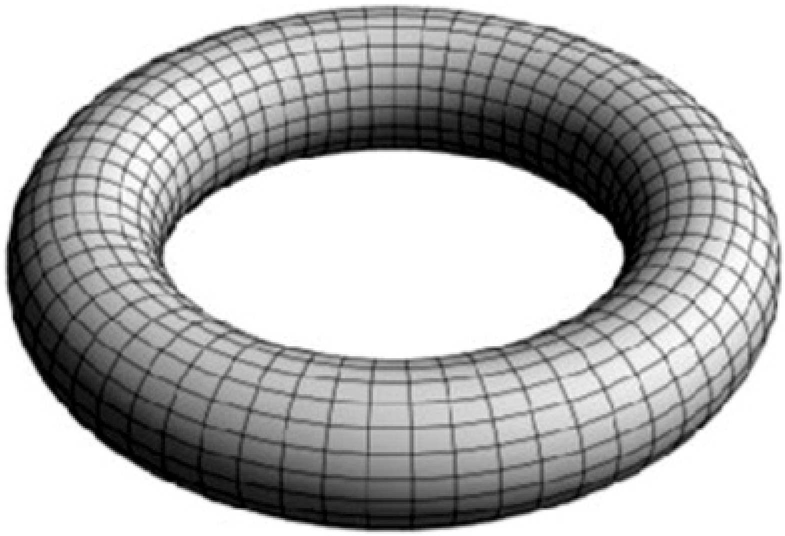
generado, también, un montón de grandes trabajos. Además, una versión geométrica del Programa Langlands para curvas está muy avanzada, tanto para curvas sobre un cuerpo de característica *p* como para superficies de Riemann comunes... En este artículo nos hemos centrado en el Programa Langlands geométrico para superficies de Riemann complejas. Deseamos mostrar cómo se puede comprender este programa como un capítulo de la teoría de campos cuánticos. No se asume que el lector posea familiaridad previa con el Programa Langlands; en lugar de ello, suponemos conocimientos de temas como teorías de gauge supersimétricas, dualidad electromagnética, modelos sigma, simetría especular, branas y teoría topológica de cuerpos. El tema del artículo es mostrar que, cuando se aplican esos conocidos ingredientes físicos al problema adecuado, el Programa Langlands geométrico surge de modo natural.

Más adelante, en la misma introducción, Witten y Kapustin otorgan a nuestra reunión en el Instituto de Estudios Avanzados (en especial, a la conferencia de mi antiguo estudiante David Ben-Zvi) el mérito de ser el punto de partida de su investigación.

En la parte central del artículo, Kapustin y Witten desarrollan las ideas que Witten había formulado en nuestra conferencia de Princeton. En especial, dilucidan las estructuras de las A-branas y B-branas que aparecen en esta imagen, las simetrías entre ellas y la relación entre las A-branas y los haces automorfos.

Para explicar sus resultados, comencemos con un ejemplo más sencillo de simetría especular. En la obra de Witten y Kapustin, la simetría especular se da entre dos espacios de móduli de Hitchin y los correspondientes modelos sigma. Pero por ahora sustituyamos uno de esos espacios de móduli por un toro bidimensional.

Este tipo de toro puede verse como el producto de dos circunfencias. En efecto, la retícula de la imagen muestra claramente que el toro es como un collar de cuentas:



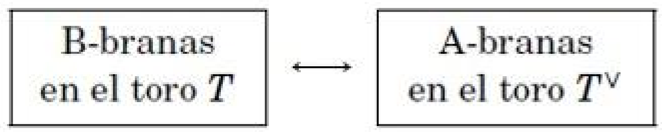
Las circunferencias verticales de la retícula hacen de cuentas, mientras que la cadenilla a la que están sujetas lo interpreta una circunferencia horizontal que podemos imaginar que discurre por el centro del toro. Un matemático diría que el collar es una «fibración» cuyas «fibras» son las cuentas y cuya «base» es la cadenilla. Por la misma regla, el toro es una fibración cuyas fibras son las circunferencias y cuya base es también una circunferencia.

Llamemos R_1 al radio de la circunferencia de la base (la cadenilla) y R_2 al radio de las circunferencias de fibras (cuentas). Resulta que la variedad dual especular será también un toro. Pero será el producto de las circunferencias de radios $1/R_1$ y R_2. Esta inversión del radio es similar a la inversión de carga eléctrica que se da en la dualidad electromagnética.

De modo que tenemos ahora dos toros especularmente duales: a uno de ellos, le llamaremos T, con radios R_1 y R_2, y al otro le llamaremos $T^\vee$, con radios $1/R_1$ y R_2. Nótese que si la circunferencia base en T es grande (es decir, R_1 es grande), entonces la circunferencia base en $T^\vee$ es pequeña (porque $1/R_1$ es pequeño), y viceversa. Este tipo de paso de «grande» a «pequeño» es típico de todas las dualidades de la física cuántica.

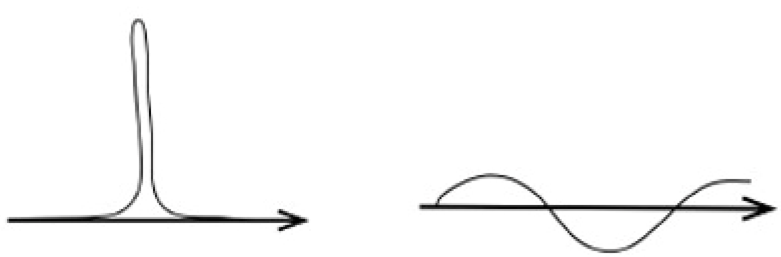
Estudiemos las B-branas de T y las A-branas de $T^\vee$. Por simetría especular

están asociadas, y comprendemos bien esta relación (a veces se le denomina «dualidad T», T es por toro).[172]



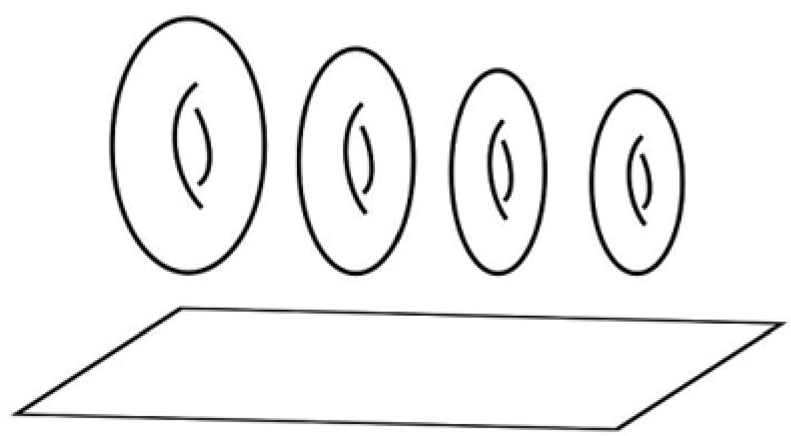
Un ejemplo típico de B-brana en el toro *T* es la llamada cero-brana, que se concentra en un punto *p* de *T*. Resulta que la A-brana dual en *TV*, por el contrario, se extenderá por toda la superficie del toro *TV*. Este «extenderse» requiere una explicación. Sin entrar en demasiados detalles, que nos alejarían mucho del tema, esta A-brana en *TV* es el propio toro *TV* equipado con una estructura adicional: una representación de su grupo fundamental en el grupo circular (similar a los que vimos en el capítulo 15). Esta representación viene determinada por la posición del punto *p* original en el toro *T*, así que, en realidad, existe una correspondencia uno a uno entre las cero-branas en *T* y las A-branas «extendidas» sobre *TV*.

Este fenómeno es similar a lo que ocurre bajo la llamada transformada de Fourier, ampliamente empleada en procesamiento de señales. Si aplicamos la transformada de Fourier a una señal concentrada cerca de un momento determinado del tiempo, obtenemos una señal que parece una onda. Esta última está «extendida» sobre la recta que representa el tiempo, como se ve en la imagen.



La transformada de Fourier se puede aplicar también a muchos otros tipos de señales, y existe una transformada inversa, que nos permite recuperar la señal original. A menudo, se transforma señales complicadas en otras más sencillas, y es por ello que la transformada de Fourier es tan útil en aplicaciones. De igual modo, bajo simetría especular, branas complicadas en un toro corresponden a otras más sencillas en el otro, y viceversa.

Resulta que podemos emplear esta simetría especular tórica para describir la simetría especular entre las branas de dos espacios de móduli de Hitchin. Aquí debemos emplear una importante propiedad de estos espacios de móduli, descrita por el propio Hitchin. Básicamente, un espacio de móduli de Hitchin es una fibración. La base de la fibración es un espacio vectorial, y las fibras son toros. Es decir, todo el espacio es un conjunto de toros, uno por cada punto de la base. En su caso más sencillo, tanto la base como las fibras tóricas son bidimensionales, y la fibración se asemeja a esto (tenga en cuenta que las fibras pueden tener diferentes tamaños en distintos puntos de la base):



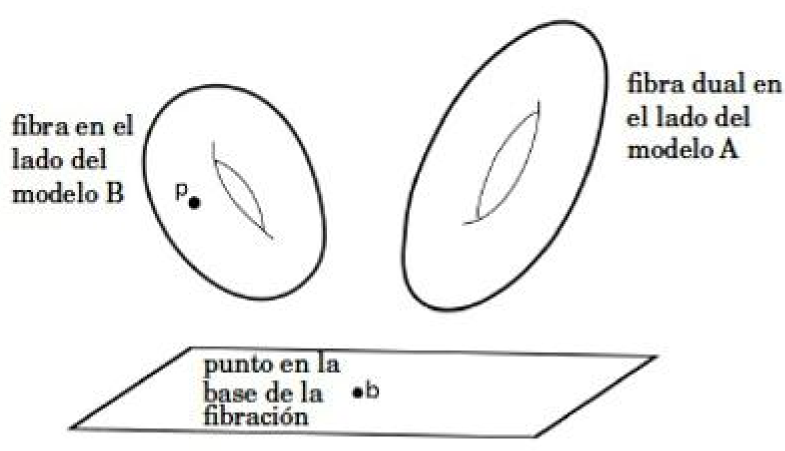
Piense en la fibración Hitchin como en una caja de donuts, excepto que hay donuts encajados no sólo en una retícula de puntos en la base de la caja de cartón, sino también *en todos* los puntos de esta base. De modo que tenemos infinitos donuts: ¡a Homer Simpson le encantaría!

Resulta que el espacio de móduli de Hitchin dual especular, el asociado al grupo Langlands dual, es también una fibración de donut (tórica) sobre la misma base. («Donuts. ¿Hay algo que no sean capaces de hacer?») Esto significa que sobre cada punto de esta base tenemos dos fibras tóricas: una en espacio de móduli de Hitchin en el lado del modelo A, y otra en el espacio de móduli de Hitchin en el lado del modelo B. Además, estos dos toros son duales especulares entre sí, en el sentido descrito arriba (si uno de ellos tiene radios R_1 y R_2, el otro los tendrá $1/R_1$ y R_2).

Esta observación nos proporciona la oportunidad de estudiar la simetría especular entre dos espacios de móduli de Hitchin en cuanto a sus fibras, empleando la simetría especular entre las fibras tóricas duales.

Por ejemplo, digamos que p es un punto del espacio de móduli de Hitchin $M(X,L_G)$. Tomemos la cero-brana concentrada en este punto. ¿Cuál será la A-brana dual especular en $M(X,G)$?

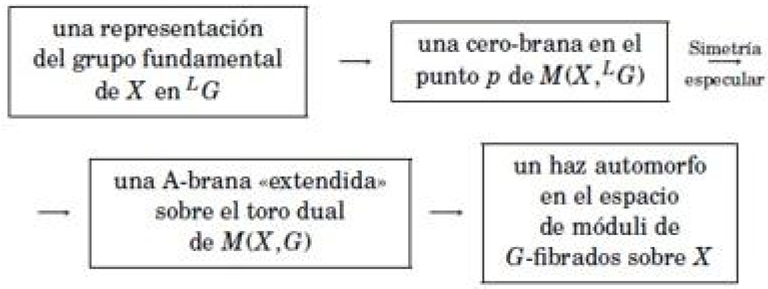
El punto p pertenece a un toro, que es la fibra de $M(X,L_G)$ sobre un punto b en la base (el toro a la izquierda, en la imagen de abajo, en el lado del modelo B). Miremos el toro dual, que es la fibra de $M(X,G)$ sobre el mismo punto b (el toro de la derecha de la imagen, en el lado del modelo A). La A-brana dual en $M(X,G)$ que buscamos será la A-brana «extendida» sobre este toro dual. Será la misma brana dual que obtenemos bajo la simetría especular entre estos dos toros.



Este tipo de descripción de la simetría especular basado en fibras (que emplea fibraciones tóricas duales) lo habían sugerido con anterioridad Andrew Strominger, Shing-Tung Yau y Eric Zaslow en una situación más general. Hoy en día se le denomina conjetura SYZ o mecanismo SYZ.[173] Se trata de una idea poderosa: mientras que una simetría especular para toros se comprende muy bien, las simetrías especulares para variedades en general (como los espacios de móduli de Hitchin) aún parecen muy misteriosas. Por lo tanto, podemos recorrer bastante camino si lo reducimos al caso tórico. Evidentemente, para ser capaces de implementarlo, necesitamos representar dos variedades duales especulares como fibraciones tóricas duales sobre la misma base (estas fibraciones tienen también que cumplir ciertas condiciones). Por suerte, en el caso de los espacios de móduli de Hitchin tenemos ese tipo de fibraciones, de modo que podemos emplear la conjetura de SYZ. En general, las dimensiones de las fibras tóricas son más de dos, pero la imagen es similar.[174]

Ahora empleamos esta simetría especular para construir la relación Langlands. Primero, resulta que puntos del espacio de móduli de Hitchin $M(X,L_G)$ son precisamente las representaciones del grupo fundamental de la superficie de Riemann X en L_G (véase nota 1 de este capítulo). Tomemos la cero-brana concentrada en este punto. Según la conjetura SYZ, la A-brana dual quedará «extendida» sobre el toro dual (la fibra en el espacio de móduli de Hitchin dual sobre el mismo punto de la base).

Kapustin y Witten no sólo describieron al detalle estas A-branas, sino que también explicaron cómo convertirlas en los haces automorfos de la relación Langlands geométrica. Por tanto, la relación Langlands se consigue mediante este gráfico de fluidos:



Un elemento fundamental de esta construcción es la aparición de objetos intermedios: A-branas. Kapustin y Witten sostenían que se podía lograr la relación Langlands en dos pasos: primero, construir una A-brana mediante simetría especular. Y después, construir un haz automorfo a partir de esta A-brana. [175] Hasta ahora sólo hemos hablado del primer paso, la simetría especular. Pero el segundo paso es también muy interesante. De hecho, el vínculo entre A-branas y haces automorfos fue una revolucionaria idea por parte de Kapustin y Witten: antes de su trabajo, no se sabía que existiera ese vínculo. Es más: Kapustin y Witten sugerían que existe un vínculo similar en una situación mucho más general. Esta sorprendente idea ya ha desencadenado una cascada de investigaciones matemáticas.

Todo esto, como diría mi padre, es bastante duro: tenemos espacios de móduli de Hitchin, simetría especular, A-branas, B-branas, haces automorfos... A uno le puede dar dolor de cabeza sólo con intentar seguirlos a todos sin perderse. Créame, incluso entre especialistas, muy poca gente conoce al detalle los mecanismos de todos los elementos de esta construcción. Mi objetivo no es que usted los aprenda. Más bien, deseo indicar las conexiones lógicas entre estos objetos y mostrar el proceso creativo de los científicos que los estudian: qué los motiva, cómo aprenden unos de otros, cómo se emplea el conocimiento que adquieren para avanzar en nuestra comprensión de las cuestiones clave.

Para aligerar un poco la explicación, he aquí un diagrama que ilustra las analogías entre los objetos que hemos tocado, a lo largo de las columnas de la piedra Rosetta de Weil, más una columna extra que corresponde a la física

cuántica. Se trata de una extensión del diagrama de la p. 238. He mezclado las columnas izquierda y central de la piedra Rosetta de Weil porque los objetos que aparecen en ellas son muy similares entre sí.

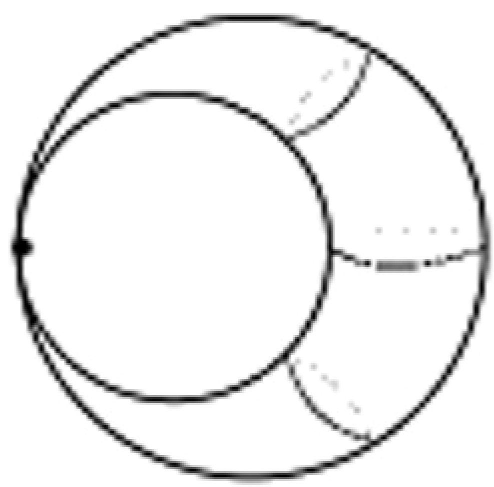
Teoría de números *Curvas/cuerpos finitos*	*Superficie de Riemann X*	*Física cuántica*
Relación Langlands	Relación Langlands geométrica	Dualidad electromagnética Simetría especular
Grupo de Galois	Grupo fundamental de X	Grupo fundamental de X
Representación del grupo de Galois en ^LG	Representación del grupo fundamental en ^LG	Cero-brana en $M(^LG,X)$
Función automorfa	Haz automorfo	A-brana en $M(G,X)$

Tras observar el diagrama, mi padre me preguntó: «¿Cómo hicieron avanzar Kapustin y Witten el Programa Langlands?». Esta es, por supuesto, una pregunta importante. En primer lugar, vincular el Programa Langlands a la simetría especular y a la dualidad electromagnética nos permite emplear el potente arsenal que hay en esas áreas de la física cuántica para realizar nuevos avances en el Programa Langlands. En sentido inverso, el trasplante del Programa Langlands a la física motivó a muchos físicos a hacerse preguntas acerca de la dualidad electromagnética que nunca se habían hecho antes. Esto ha llevado a algunos descubrimientos fascinantes. En segundo lugar, el lenguaje de las A-branas resulta estar especialmente bien adaptado al Programa Langlands. Muchas de estas A-branas poseen una estructura mucho más sencilla que los haces automorfos, que son famosos por su complicación. Por tanto, si empleamos el lenguaje de A-branas, podemos desvelar algunos de los misterios del Programa Langlands.

Quiero mostrarle un ejemplo concreto de cómo se puede aplicar este nuevo lenguaje. De modo que permítame hablarle de mi trabajo posterior[176] con Witten, que acabamos en 2007. Para explicarle lo que hicimos, he de contarle

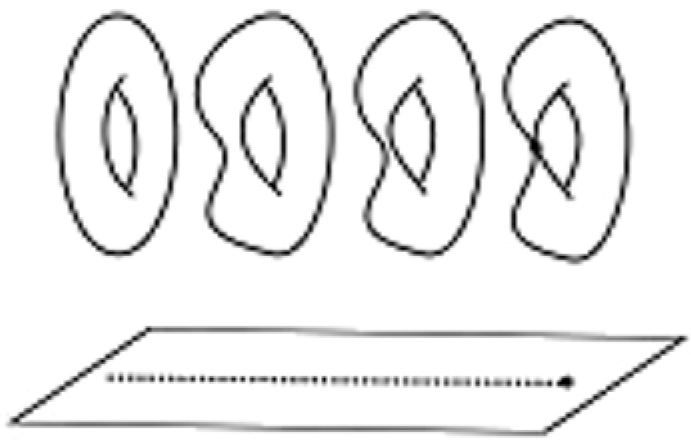
antes acerca de un problema que, hasta ahora, y por decirlo así, he ocultado bajo la alfombra. En la explicación anterior, hice ver que todas las fibras que aparecían en los dos espacios de móduli de Hitchin eran toros diferenciables, como los que conocemos (como los que mostré en los gráficos anteriores: donuts perfectos, si lo prefiere). Y aunque esto es cierto para la mayoría de las fibras, existen fibras especiales con un aspecto diferente: se trata de degeneraciones del toro diferenciable. Si no hubiera degeneraciones, la conjetura SYZ nos daría una descripción completa de la simetría especular entre las branas de ambos espacios de móduli de Hitchin. Pero la presencia de toros degenerados complica drásticamente la simetría especular. La parte más interesante y complicada de la simetría especular corresponde, de hecho, a lo que ocurre con las branas que «viven» en esos toros degenerados.

En su artículo, Kapustin y Witten tan sólo tenían en cuenta la simetría especular restringida a los toros diferenciables. Esto dejaba abierta la cuestión de los toros degenerados. En nuestro trabajo, Witten y yo explicamos qué ocurre en los casos más sencillos de toros degenerados, aquellos con las llamadas «singularidades de una *V* -variedad» como este toro contraído:



Esta es, en realidad, la imagen de una fibra degenerada que surge en el caso de que nuestra superficie de Riemann *X* sea también un toro, y el grupo L_G es

SO(3) (está tomada directamente de mi artículo con Witten). En este caso, la base de la fibración Hitchin es un plano. En todos los puntos de este plano, excepto por tres puntos especiales, las fibras son los habituales toros diferenciables. De modo que, a excepción de estos tres puntos, la fibración Hitchin es sólo una familia de toros diferenciables. Pero en el entorno de cada uno de esos tres puntos, el «cuello» de la fibra tórica/donut se deforma, como se ve en la imagen siguiente, en la que seguimos las fibras a lo largo de puntos situados en un camino en la base.



Es como si Homer Simpson se hubiese puesto tan contento por tener una caja con infinitos donuts que accidentalmente la hubiera pisado, aplastando algunos de los donuts (pero no se preocupe por Homer: le deberían quedar infinitos donuts perfectos).

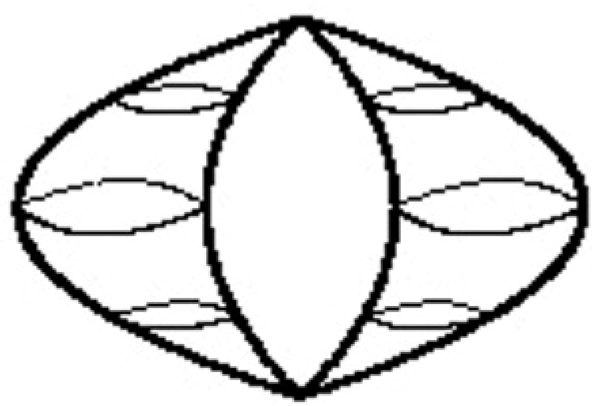
Conforme nos acercamos al punto marcado en la base (que es uno de los tres puntos especiales de la misma) el cuello del toro en la fibra se va haciendo cada vez más estrecho, hasta que, en el punto señalado, se corta. En el punto marcado, la fibra se muestra bajo un ángulo diferente en la imagen de arriba. Ya no se trata de un toro: es lo que llamamos un toro «degenerado».

La pregunta que necesitamos responder es qué ocurre cuando la cero-brana en el espacio de móduli de Hitchin se concentra en el punto especial del toro degenerado como el punto marcado de la imagen de arriba, en que el cuello se

corta. Los matemáticos lo llaman singularidad de una *V* -variedad.

Resulta que este punto posee un grupo de simetría adicional. En el ejemplo que pongo arriba, es el mismo que el grupo de simetrías de una mariposa. Dicho de otra manera: consiste en el elemento identidad y en otro elemento que corresponde dar la vuelta a las alas de una mariposa. Esto implica que hay no uno, sino dos cero-branas diferentes concentradas en este punto. La pregunta es: ¿cuáles serán las dos A-branas correspondientes en el espacio de móduli de Hitchin de la dualidad especular? Nótese que en este caso, *G* será el grupo SU(2), que es el grupo dual Langlands de SO(3).

Como Witten y yo explicamos en nuestro artículo, en los tres puntos especiales de la base de la fibración Hitchin, el toro degenerado del lado de la dualidad especular se verá así (la imagen procede de nuestro artículo):



Aparece en la fibración Hitchin de manera similar a lo mostrado en la imagen anterior, excepto que ahora, conforme nos acercamos a los puntos especiales de la base, el cuello del toro en la fibra se hace cada vez más fino por dos lados, y se corta en ambos al llegar al punto marcado de la base.

La fibra degenerada correspondiente es bastante diferente de la anterior porque ahora el toro se estrecha por dos puntos en lugar de por uno. Por lo tanto, este toro degenerado tiene dos partes, que los matemáticos denominan «componentes». Ahora podemos contestar a nuestra pregunta: las dos

A-branas que buscamos (duales especulares de las dos cero-branas concentradas en el punto singular del primer toro degenerado) serán las A-branas «extendidas» sobre cada uno de los dos componentes del toro dual degenerado.

Esto es sólo un prototipo de lo que ocurre en un caso general. Cuando miramos los dos espacios de móduli de Hitchin como fibraciones sobre la misma base habrá fibras degeneradas en ambos lados. Pero los mecanismos de degeneración serán diferentes: si en el lado del modelo B hay una singularidad de una *V*-variedad con un grupo de simetría interno (como el grupo de mariposa del ejemplo anterior), entonces la fibra del lado del modelo A consistirá en varios componentes, como los dos componentes de la imagen previa. Resulta que habrá tantos componentes como el número de elementos del grupo de simetría del lado del modelo A. Esto asegura que las cero-branas concentradas en puntos singulares queden perfectamente emparejadas con las A-branas «extendidas» sobre esos componentes.

En mi artículo con Witten analizamos este fenómeno en detalle. De un modo un tanto sorprendente, esto nos llevó a nuevos descubrimientos no sólo en el Programa Langlands geométrico para superficies de Riemann, sino también para la columna central de la piedra Rosetta de Weil, que trata de curvas sobre cuerpos finitos. Este es un buen ejemplo de cómo las ideas y descubrimientos en un área (física cuántica) se propagaron hasta las raíces mismas del Programa Langlands.

Es aquí donde radica el poder de las conexiones. Ahora no tenemos tres, sino cuatro columnas en la piedra Rosetta de Weil: la cuarta columna corresponde a la física cuántica. Cuando descubrimos algo nuevo en esta columna, miramos cómo deberían ser los resultados análogos en las otras tres columnas y, esto puede, a su vez, convertirse en la fuente de nuevas ideas y descubrimientos.

Witten y yo comenzamos a trabajar en este proyecto en abril de 2007 cuando yo estaba como visitante en el Instituto, en Princeton, y el artículo se acabó en Halloween, el 31 de octubre (recuerdo perfectamente la fecha porque tras

subirlo *online* fui a celebrarlo a una fiesta de Halloween). Durante esos siete meses acudí tres veces al Instituto, cada una de esas veces por una semana, aproximadamente. Todos los días trabajábamos juntos en el cómodo despacho de Witten. El resto del tiempo estábamos separados. En aquella época yo dividía mi tiempo entre Berkeley y París, y pasé también un par de semanas de visita en un instituto de matemáticas de Río de Janeiro.

Pero dónde me encontrara carecía de importancia. Mientras tuviese una conexión a Internet, podíamos colaborar de modo eficaz. Durante los períodos más intensos intercambiábamos una docena de correos electrónicos al día, ponderábamos cuestiones, nos enviábamos el uno al otro esbozos del artículo, etcétera. Dado que compartimos el nombre, había una especie de simetría especular entre nuestros correos electrónicos: todos comenzaban con un «Querido Edward» y acababan con «Un abrazo, Edward».

Esta colaboración me proporcionó la oportunidad de observar de cerca a Witten. Me llamó la atención tanto por su potencia intelectual como por su ética de trabajo. Presentía que le daba mucha importancia a la elección de los problemas en los que ponerse a trabajar. Ya he hablado de ello con anterioridad en este libro: algunos problemas pueden tardar trescientos cincuenta años en resolverse, de modo que es importante sopesar la proporción de importancia de un problema determinado y la probabilidad de éxito en un lapso de tiempo razonable. Creo que Witten tiene una intuición excepcional para esto, además de un muy buen gusto. Y una vez que escoge el problema, es incansable en su persecución del mismo, como el personaje de Tom Cruise en *Collateral*. Su enfoque es exhaustivo, metódico: no deja piedra sin levantar. Como todo el mundo, a veces se queda perplejo y confuso. Pero siempre halla el camino. Trabajar con él fue enriquecedor y estimulante en más de un aspecto.

La investigación de la interconexión entre el Programa Langlands y la dualidad electromagnética se convirtió pronto en tema de acalorados debates, que acabaron convirtiéndose en una nueva área de estudio. En este proceso

desempeñaron un papel importante las conferencias anuales que organizamos en el Instituto Kavli de Física Teórica, en Santa Bárbara. El director del Instituto, David Gross, ganador del premio Nobel, era un gran entusiasta de nuestra investigación.

En junio de 2009 me pidieron que hablara de estos nuevos descubrimientos en el Séminaire Bourbaki. El Bourbaki, uno de los seminarios matemáticos en activo más antiguos del mundo, es objeto de adoración en la comunidad matemática. Hornadas de matemáticos se ven atraídos a sus reuniones en el Instituto Henri Poincaré de París, y duran un fin de semana tres veces al año. El seminario lo crearon, poco después de la segunda guerra mundial, un grupo de jóvenes y ambiciosos matemáticos que se hacían llamar (con un nombre falso) Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki. Su idea era revisar los fundamentos de las matemáticas empleando un nuevo estándar de rigor basado en la teoría de conjuntos iniciada por Georg Cantor a finales del siglo XIX. Su éxito fue sólo parcial, pero su influencia en las matemáticas ha sido enorme. André Weil fue uno de los miembros fundadores, y algún tiempo más tarde Alexander Grothendieck jugó un papel destacado.

El objetivo del Séminaire Bourbaki es informar de las novedades más fascinantes de las matemáticas. El comité secreto que escoge los temas y los conferenciantes ha seguido la regla, desde su inicio, de que sus miembros han de tener menos de cincuenta años. Los fundadores del movimiento Bourbaki creían, al parecer, que necesitaba constantemente sangre fresca, y esto les ha sido muy útil. El comité invita a los conferenciantes y se asegura de que tengan su conferencia escrita por adelantado. En el seminario se distribuyen copias a los asistentes. Como se considera un honor ser invitado a dar una charla en el seminario, los conferenciantes cumplen con sus obligaciones.

El título de mi conferencia era «Teoría de gauge y Programa de Langlands».[177] Aunque mi charla era más técnica, y comprendía más fórmulas y terminología matemática, básicamente seguía la línea cronológica que he presentado en este libro. Comencé con la piedra Rosetta de André Weil, dando un breve

repaso a cada una de sus columnas, como he hecho aquí. Dado que Weil fue uno de los fundadores del grupo Bourbaki, me pareció especialmente adecuado hablar de sus ideas en el seminario. Después me centré en los nuevos descubrimientos, vinculando el Programa Langlands y la dualidad electromagnética.

La conferencia fue bien recibida. Me encantó ver en primera fila a otro miembro clave del movimiento Bourbaki, Jean-Pierre Serre, una leyenda por méritos propios. Al acabar la conferencia vino a hablar conmigo. Tras hacerme unas cuantas preguntas técnicas, me hizo la siguiente observación:

—Me pareció interesante que pienses en la física cuántica como la cuarta columna de la piedra Rosetta de Weil —me dijo—. ¿Sabes? A André Weil no le gustaba demasiado la física. Pero creo que si hoy en día estuviese aquí, estaría de acuerdo con que la física cuántica tiene un importante papel en esta historia.

Era el mejor cumplido que pudiesen hacer a nadie.

En los últimos años se han hecho muchos progresos en el Programa Langlands, en todas las columnas de la piedra Rosetta de Weil. Aún estamos lejos de comprender plenamente los misterios más profundos del Programa Langlands, pero una cosa queda clara: ha superado la prueba del tiempo. Hoy en día vemos más claramente que nos ha llevado a algunas de las preguntas más fundamentales de las matemáticas y la física.

Estas ideas son tan vitales ahora como lo eran cuando Langlands escribió su carta a André Weil, hace casi cincuenta años. No sé si podremos hallar todas las respuestas en los próximos cincuenta años, pero no cabe duda de que estos serán al menos tan fascinantes como lo han sido los últimos cincuenta. Y quizá algunos de los lectores de este libro tengan la posibilidad de contribuir a este apasionante proyecto.

El Programa Langlands ha ocupado la posición central de este libro. Creo que proporciona una buena panorámica de las matemáticas modernas: su profunda estructura conceptual, sus descubrimientos revolucionarios, sus fascinantes conjeturas, sus intensos teoremas y sus inesperadas conexiones

entre diferentes campos. También sirve para ilustrar los intrincados vínculos entre las matemáticas y la física y el diálogo mutuamente enriquecedor entre ambas disciplinas. Así, el Programa Langlands sirve de ejemplo perfecto de las cuatro cualidades de las teorías matemáticas de las que hablamos en el capítulo 2: universalidad, objetividad, resistencia y relevancia para el mundo cotidiano.

Evidentemente, hay muchas otras áreas fascinantes en las matemáticas. Algunas se han expuesto en literatura para no especialistas, y otras aún no. Como escribiera Henry David Thoreau:[178] «Hemos oído hablar de la poesía de las matemáticas, pero poco de ella se ha cantado todavía». Sus palabras, lamentablemente, siguen vigentes hoy en día, más de ciento cincuenta años después de que las publicara, lo que significa que nosotros, los matemáticos, tenemos que hacerlo mejor a la hora de mostrar el poder y la belleza de nuestra disciplina a un público más amplio. Al mismo tiempo, espero que la historia del Programa Langlands provoque curiosidad entre los lectores acerca de las matemáticas, y los inspire a aprender más.

Capítulo 18
Buscando la fórmula del amor

En 2008 me invitaron a realizar investigación y dar una conferencia acerca de mi trabajo en París, como receptor de una recién creada *Chaire d'Excellence* que otorgaba la Fondation Sciences Mathématiques de París.

París es uno de los centros mundiales de las matemáticas; es también una de las capitales del cine. Mientras estuve allí tuve la idea de rodar una película acerca de las matemáticas. En las películas populares, se suele representar a los matemáticos como sujetos extraños, excéntricos, inadaptados sociales al borde de la enfermedad mental, lo que refuerza el estereotipo de los matemáticos como seres fríos y aburridos, algo muy alejado de la realidad. ¿Quién querría una vida así, en un trabajo que, supuestamente, no tiene nada que ver con nada?

Cuando regresé a Berkeley en diciembre de 2008, sentí que necesitaba canalizar mi energía artística. Mi vecino Thomas Farber es un escritor maravilloso, que enseña escritura creativa en la Universidad de California Berkeley. Le pregunté:

—¿Y si escribiéramos juntos un guión acerca de un escritor y un matemático?

A Tom le gustó la idea y sugirió que la acción tuviera lugar en una playa del sur de Francia. Decidimos que la película comenzaría de la siguiente manera: un escritor y un matemático, en un bello y soleado día, sentados en mesas contiguas en una terraza de una cafetería junto a la playa. Ambos saborean la belleza que les rodea, se miran y comienzan a charlar. ¿Qué ocurre luego?

Comenzamos a escribir. El proceso era similar a la manera en que colaboro con matemáticos y físicos. Pero también era algo diferente: hallar las palabras adecuadas para describir los sentimientos y emociones de los personajes, llegar al corazón de una historia. El marco conceptual era mucho más fluido y libre de restricciones de lo que yo estaba acostumbrado a emplear. Y allí estaba yo, codo a codo con un gran escritor por el que sentía tanto respeto y

admiración. Por suerte para mí, Tom no quiso imponer su voluntad, sino que me trató como a un igual, y fue muy amable al permitirme desarrollar mis capacidades como escritor. Como aquellos mentores que me guiaron en el mundo de las matemáticas, Tom me ayudó a entrar en el mundo de la escritura, por lo que siempre le estaré agradecido.

En uno de los diálogos, el matemático explica al escritor el «problema de los dos cuerpos». Se refiere a dos objetos (cuerpos) que interactúan entre sí, como una estrella y un planeta (ignoramos las demás fuerzas que actúan sobre ellos). Existe una sencilla fórmula matemática que predice con precisión sus trayectorias en el futuro una vez que sabemos la fuerza de atracción recíproca. Qué diferente, sin embargo, de la interacción entre dos cuerpos humanos, dos amantes o dos amigos. En este caso, incluso si el problema de los dos cuerpos tiene solución, no es única.

Nuestro guión trataba sobre el choque entre el mundo real y el mundo de la abstracción: para Richard, el escritor, es el mundo de la literatura y el arte; para Philip, el matemático, el de la ciencia y las matemáticas. Cada uno de ellos es un maestro en su dominio, pero ¿de qué manera afecta esto a su vida en el mundo real? Philip intenta llegar a un compromiso entre la verdad matemática, en la que es un experto, y la verdad humana, en la que no lo es. Aprende que enfrentarse a los problemas de la vida como se enfrenta a los problemas matemáticos no siempre es útil.

Tom y yo también nos preguntábamos: ¿es posible ver los parecidos y diferencias entre arte y ciencia (las «dos culturas», como las denominaba C. P. Snow)[179] a través de las narrativas de ambos hombres? En realidad, la película se puede interpretar metafóricamente como las dos caras de un mismo personaje: el lado izquierdo y el lado derecho del cerebro, si lo prefiere. Están en constante competición, pero se afectan recíprocamente: las dos culturas coexisten en la misma mente.

En nuestro guión, los personajes intercambian historias acerca de sus relaciones pasadas, amores vividos y desaparecidos, corazones rotos. Y

conocen a varias mujeres a lo largo del día, de modo que podemos verlos emplear la pasión por sus profesiones como un medio de seducción. Hay mucho interés entre ellos también, pero al mismo tiempo un conflicto que se va gestando, y que llega a una inesperada conclusión al final.

Llamamos a nuestro guión *El problema de los dos cuerpos*, y lo publicamos como libro.[180] Su versión teatral la ha representado el Teatro Berkeley, dirigido por la premiada Barbara Oliver. Era mi primera incursión en el arte, y me sorprendió y divirtió la reacción del público. Por ejemplo, la mayoría creyó que todo lo que le ocurría al matemático de la obra era autobiográfico.

Evidentemente, muchas de mis experiencias contribuyeron a la redacción de *El problema de los dos cuerpos*. Por ejemplo, tuve una novia rusa en París, y algunas de las notables cualidades de Natalia, la novia de Philip en la obra, están inspiradas en ella. Algunas escenas del guión están sacadas de experiencias mías, y otras de las de Tom. Pero como escritor, lo que te motiva es ante todo el deseo de crear personajes atractivos y una historia interesante. Una vez Tom y yo decidimos qué era lo que queríamos comunicar, tuvimos que moldear los personajes de una manera determinada. Esas experiencias de nuestra vida real quedaron tan embellecidas y distorsionadas que ya no eran nuestras. Los protagonistas de *El problema de los dos cuerpos* adquirieron su propia personalidad, como debía ser, para ser arte.

Conforme comenzamos a buscar un productor para convertir *El problema de los dos cuerpos* en un largometraje, pensé que valdría la pena realizar un proyecto cinematográfico a una escala menor. Cuando regresé a París para continuar con mi *Chaire d'Excellence* en abril de 2009, un amigo, el matemático Pierre Schapira, me presentó a una joven directora de cine con mucho talento, Reine Graves. Antigua modelo de pasarela, había dirigido varias películas originales y arriesgadas (una de las cuales ganó el premio Pasolini en el Festival de Cine Censurado de París). En una comida organizada por Pierre, ella y yo congeniamos de inmediato. Le sugerí que trabajáramos juntos en un corto acerca de matemáticas, y a ella le encantó la idea. Meses

más tarde, cuando le preguntaron al respecto, respondió que creía que las matemáticas eran una de las pocas áreas que quedaban en la que había una genuina pasión.[181]

Cuando comenzamos a proponer ideas, mostré a Reine un par de fotografías que había hecho previamente, en las que había tatuado digitalmente fórmulas matemáticas en cuerpos humanos. A Reine le gustaron y decidimos que intentaríamos hacer una película en que hubiese el tatuaje de una fórmula.

El tatuaje como forma de arte se originó en Japón. He visitado Japón una docena de veces (para trabajar con Feigin, quien había estado pasando sus veranos en la Universidad de Kioto) y me fascina la cultura japonesa. No es sorprendente que Reine y yo fuésemos al cine japonés en busca de inspiración. Una de estas películas fue *Yûkoku* («Patriotism»), del gran escritor japonés Yukio Mishima, basado en su cuento homónimo. El propio Mishima la dirigió y protagonizó.

La película es en blanco y negro y la acción se desarrolla en el austero escenario típico del teatro japonés *no*.[xxviii] Carece de diálogo, pero hay música de la ópera *Tristán e Isolda*, de Wagner, de fondo. Tiene dos personajes: un joven oficial de la Guardia Imperial, el teniente Takeyama, y su esposa, Reiko. Los amigos del oficial protagonizan un fracasado golpe de estado (el filme hace referencia a los acontecimientos de febrero de 1936, que Mishima pensaba tuvieron un efecto dramático en la historia de Japón). Al oficial le dan la orden de ejecutar a los autores del golpe, algo que no puede hacer: son amigos cercanos. Pero tampoco puede desobedecer las órdenes del emperador. La única salida es el suicidio ritual, el *seppuku* (o *haraquiri*).[xxix]

Aunque de sólo veintinueve minutos de duración, el filme me conmovió profundamente. Podía sentir el vigor y la claridad de la visión de Mishima. Su

---

[xxviii] Forma de teatro musical japonés, de tipo melodramático, cuyas historias solemnes y trágicas suelen versar en torno a la redención. Se remonta al siglo XII, aunque su auge se da en el período Muromachi (siglos XIV-XVI). (*N. del t.*).

[xxix] Aunque se escriben con los mismos caracteres, las palabras *seppuku* y *haraquiri* no significan exactamente lo mismo. *Haraquiri* significa, literalmente, «rajarse el vientre» y se considera despectiva o inapropiada en Japón, donde prevalece *seppuku*. La palabra genérica para suicido es *jigai*.(*N. del t.*).

puesta en escena era poderosa, cruda, sin remordimientos. Uno puede no estar de acuerdo con sus ideas (y, de hecho, su visión del vínculo íntimo entre amor y muerte no me atrae) pero guardo un tremendo respeto por el autor, por su fuerza e integridad.

La película de Mishima iba contra las convenciones habituales del cine: era muda, con texto escrito entre los «capítulos» para explicar lo que ocurriría a continuación. Era teatral; sus escenas estaban cuidadosamente ensayadas, con poco movimiento. Pero me cautivó la corriente subterránea de emoción. Yo no conocía aún la escalofriante similitud entre la auténtica muerte de Mishima y lo que ocurría en la película.

Quizá el filme tuvo un efecto tan profundo en mí porque Reine y yo también queríamos crear una película poco convencional, hablar de las matemáticas de una manera como nadie lo había hecho hasta entonces. Sentí que Mishima había creado el marco estético y el lenguaje que buscábamos. Llamé a Reine.

—He visto la película de Mishima —dije—; deberíamos hacer una película así.

—OK —respondió ella—. Pero ¿de qué tratará?

De repente las palabras comenzaron a salir de mi boca. Todo estaba claro como el agua.

—Un matemático crea una fórmula del amor —le dije—, pero luego descubre el lado peligroso de la fórmula: se puede usar para el bien, pero también para el mal. Se da cuenta de que ha de esconder la fórmula para evitar que caiga en las manos equivocadas. Y decide tatuarla en el cuerpo de la mujer que ama.

—Suena bien. ¿Cómo crees que deberíamos llamarla?

—Mm… ¿Qué tal así: *Ritos de amor y matemáticas*?

Y así nació la idea de la película.

Lo concebimos como una alegoría, que mostrara que una fórmula matemática puede ser bella como un poema, una pintura o una pieza musical. La idea era no apelar tanto a la parte cerebral como a la visceral e intuitiva. Que el público *sienta* en lugar de *entenderlo*. Pensamos que subrayar los aspectos humanos y espirituales de las matemáticas contribuiría a inspirar curiosidad en el

espectador.

A menudo se presentan las matemáticas, y la ciencia en general, como algo frío y estéril.

Para ser sinceros, el proceso de crear nuevas matemáticas es una búsqueda apasionada, una experiencia profundamente personal, exactamente igual que la creación de arte o música. Exige amor y dedicación; es una lucha contra lo desconocido y contra uno mismo que despierta fuertes emociones. Y las fórmulas que uno descubre se meten, realmente, bajo la propia piel, como el tatuaje de la película.

En nuestro filme, un matemático descubre «la fórmula del amor». Evidentemente, es una metáfora: siempre intentamos llegar al máximo conocimiento, a la máxima revelación, saberlo todo. En el mundo real, hemos de conformarnos con un conocimiento y comprensión parciales. Pero ¿qué ocurriría si alguien consiguiese acceder a la Verdad definitiva? ¿Y si esta se pudiera representar mediante una fórmula matemática? Sería la fórmula del amor.

Henry David Thoreau lo expresa de modo elocuente:[182]

La expresión más única y bella de cualquier verdad ha de tomar, en fin, la forma matemática. Podemos simplificar tanto las reglas de la filosofía moral como las de la aritmética en una sola fórmula que las exprese a ambas.

Incluso si una sola fórmula no bastase para explicarlo todo, las fórmulas matemáticas se encuentran entre las más versátiles, puras y económicas expresiones de la verdad conocidas por la humanidad. Comunican conocimientos atemporales y de valor incalculable, a los que no afectan ni las modas pasajeras ni las veleidades, y proporcionan el mismo significado a todo aquel que entre en contacto con ellas. Las verdades que expresan son las verdades necesarias, firmes faros de realidad que guían a la humanidad a lo largo del tiempo y el espacio.

Heinrich Hertz, quien demostró la existencia de las ondas electromagnéticas y cuyo apellido se emplea hoy en día como medida de frecuencia, expresaba de

esta manera su admiración:[183] «Uno no puede evitar sentir que estas fórmulas poseen una existencia independiente y una inteligencia propia; que son más sabias que nosotros, más sabias incluso que sus descubridores».

Hertz no era el único que se sentía así. La mayoría de practicantes de las matemáticas creen que las ideas y fórmulas matemáticas existen en un mundo aparte. Robert Langlands escribe que las matemáticas «a menudo llegan en forma de insinuaciones, una palabra que sugiere que las matemáticas, y no sólo sus conceptos básicos, existen de forma independiente a nosotros. Esta es una noción difícil de creer, pero a un matemático profesional le resulta difícil prescindir de ella».[184] Otro eminente matemático, Yuri Manin (el tutor de Drinfeld) se hace eco de esto cuando habla de su «visión del gran castillo de las matemáticas, elevándose, en algún lugar del universo platónico de las Ideas, que [los matemáticos] humilde y devotamente descubren (más que inventan)».[185]

Desde este punto de vista, el joven prodigio francés *descubrió* los grupos de Galois, no los *inventó*. Hasta que lo hizo, el concepto existió en algún sitio, en los jardines encantados del mundo ideal de las matemáticas, esperando a que lo hallasen. Incluso si los artículos de Galois se hubiesen perdido y él no hubiese obtenido el reconocimiento debido por su descubrimiento, alguien diferente habría hallado exactamente los mismos grupos.

Compare esto con los descubrimientos en otras áreas de la experiencia humana: si Steve Jobs no hubiera regresado a Apple, posiblemente nunca habríamos conocido los iPods, iPhones e iPads. Se habrían realizado otras innovaciones tecnológicas, pero no hay razón alguna para suponer que otras personas hubieran hallado los mismos elementos. En contraste con esto, las verdades matemáticas son inevitables.

Al mundo habitado por los conceptos e ideas matemáticos a menudo se le denomina mundo platónico de las matemáticas, por el filósofo griego Platón, quien fue el primero en asegurar que las entidades matemáticas son independientes de nuestras actividades racionales.[186] En su libro *El camino a la*

realidad. Una guía completa a las leyes del universo, el premiado físico matemático Roger Penrose escribe que las afirmaciones matemáticas que pertenecen al mundo platónico de las ideas «son precisamente aquellas que son objetivamente ciertas. Decir que una afirmación matemática tiene una existencia platónica es tan sólo decir que es verdadera en un sentido objetivo». De igual manera, las nociones matemáticas «tienen una existencia platónica porque son nociones objetivas».[187]

Como Penrose, yo creo que el universo platónico de las matemáticas está separado tanto del mundo físico como del mental. Por ejemplo, pensemos en el último teorema de Fermat. Penrose se pregunta, retóricamente, en su libro: «¿Hemos de asumir que la afirmación de Fermat fue siempre verdad, mucho antes de que Fermat la hiciera pública, o su validez es tan sólo un asunto cultural, dependiendo del estándar subjetivo de la comunidad humana de matemáticos?».[188] Apoyándose en la larga tradición de la argumentación por *reductio ad absurdum*, Penrose nos demuestra que aceptar la interpretación subjetiva nos llevaría rápidamente a aseveraciones que son «patentemente absurdas» y que minarían la independencia del conocimiento matemático de todas las actividades humanas.

Kurt Gödel, cuya obra —especialmente los famosos teoremas de la incompletitud— revolucionó la lógica matemática, era un abierto partidario de esta opinión. Escribió que los conceptos matemáticos «forman una realidad objetiva propia, que no podemos crear ni cambiar, sino tan sólo percibir y describir».[189] Dicho de otra manera, «las matemáticas describen una realidad no sensorial, que existe independientemente tanto de los actos como de la disposición de la mente humana y sólo se percibe, y probablemente de modo muy incompleto, a través de la mente humana».[190]

El mundo platónico de las matemáticas existe también de modo independiente de la realidad física. Por ejemplo, como veíamos en el capítulo 16, los matemáticos desarrollaron el conjunto de teorías de gauge sin referencia alguna a la física. En realidad, resulta que sólo tres de estos modelos describen

fuerzas conocidas de la naturaleza (electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil). Corresponden a tres grupos de Lie específicos: el grupo circular, SU(2) y SU(3), respectivamente, pese a que hay una teoría de gauge para *todos y cada uno* de los grupos de Lie. Aparte de esas tres, las teorías de gauge asociadas a grupos de Lie son matemáticamente correctas, pero no se conocen conexiones entre ellas y el mundo real. Es más: hemos hablado de las extensiones supersimétricas de estas teorías de gauge, que podemos analizar matemáticamente pese a que en la naturaleza no se ha hallado la supersimetría, y muy posiblemente no esté presente en ella en absoluto. Hay también modelos similares, que tienen sentido matemáticamente, en un espacio-tiempo con más dimensiones que cuatro. Hay muchos otros ejemplos de poderosas teorías matemáticas que no están directamente vinculadas con ningún tipo de realidad física.

En su libro *Sombras de la mente: hacia una comprensión científica de la consciencia*, Roger Penrose habla del triángulo: el mundo físico, el mundo mental y el mundo platónico de las matemáticas.[191] Están separados pero profundamente interconectados. Todavía no comprendemos del todo cómo se vinculan, pero hay una cosa clara: todos ellos afectan nuestras vidas de modos poderosos. Sin embargo, mientras que apreciamos la importancia de los mundos físico y mental, muchos de nosotros permanecemos en una alegre ignorancia hacia el mundo de las matemáticas. Creo que cuando despertemos a esta realidad oculta y empleemos sus poderes aún sin explotar, habrá un avance en nuestra sociedad de la importancia de la revolución industrial.

En mi opinión, es la objetividad del pensamiento matemático la fuente de sus ilimitadas posibilidades. Esta cualidad distingue a las matemáticas de todas las demás empresas humanas. Creo que comprender qué hay tras esta cualidad arrojará luz sobre los misterios más profundos de la realidad física, la consciencia y sus interrelaciones. En otras palabras: cuanto más cerca nos situemos del mundo platónico de las matemáticas, más poder tendremos para comprender el mundo que nos rodea y nuestro lugar en él.

Por suerte, nada puede evitar que nos adentremos más y más en esta realidad platónica y la integremos en nuestras vidas. Lo realmente notable es la democracia inherente a las matemáticas: mientras que algunas partes de los mundos físico y mental pueden interpretarse o percibirse de modo distinto en función de las diferencias personales, o incluso pueden no resultar accesibles para algunos de nosotros, los conceptos y ecuaciones matemáticos se perciben de la misma manera y nos pertenecen a todos *por igual*. Nadie puede tener el monopolio sobre el conocimiento matemático; nadie puede alegar que una fórmula o idea matemática es de su invención; ¡nadie puede patentar una fórmula! Por poner un ejemplo, Albert Einstein no podría patentar su fórmula $E = mc^2$. Esto se debe a que, si es correcta, una fórmula matemática expresa una realidad eterna acerca del universo. De aquí que nadie puede alegar que sea de su propiedad; es nuestra para que la compartamos.[192] Ricos o pobres, blancos o negros, jóvenes o viejos, nadie nos puede arrebatar esas fórmulas. Nada en este mundo es tan profundo y elegante, y aun así, tan accesible para todos.

Imitando a Mishima, la pieza central del austero decorado de *Ritos de amor y matemáticas* era una gran inscripción caligráfica colgada de la pared. En la película de Mishima, rezaba *shisei*, «sinceridad». Su película trataba sobre la sinceridad y el honor. La nuestra trataba acerca de la verdad, así que, como es evidente, pensamos que debía rezar «verdad». Y decidimos no ponerlo en japonés, sino en ruso.

La palabra «verdad» se puede decir de dos maneras en ruso. Las más conocida, *pravda*, hace referencia la verdad fáctica, a hechos (de ahí el nombre del diario oficial del Partido Comunista de la Unión Soviética). La otra, *istina*, tiene el sentido de una verdad más profunda, filosófica. Por ejemplo: la afirmación de que el grupo de simetrías de una mesa redonda es el círculo es *pravda*, pero la afirmación del Programa Langlands (en los casos en que se ha probado) es *istina*. Obviamente, la verdad por la que el matemático se sacrifica es *istina*.



En nuestra película queríamos reflexionar sobre el aspecto moral del conocimiento matemático: una fórmula tan poderosa bien puede tener un lado oscuro, el potencial de emplearse para el mal. Pensemos en un grupo de físicos teóricos, a principios del siglo XX, intentando comprender la estructura del átomo. Lo que ellos pensaban que era un noble y puro objetivo científico los llevó al descubrimiento de la energía atómica. Nos trajo cosas muy buenas, pero también la destrucción y la muerte. De igual manera, una fórmula matemática, que descubriéramos en nuestra búsqueda de conocimiento, podría resultar nociva. Aunque los científicos somos libres de investigar lo que queramos, creo también que es nuestra responsabilidad hacer todo lo que esté a nuestro alcance para asegurarnos de que las fórmulas que descubramos no se empleen para el mal. Es por esa razón que, en nuestra película, el matemático está dispuesto a morir para evitar que la fórmula caiga en las manos equivocadas. Tatuarla es la única manera de esconder la fórmula y, al mismo tiempo, asegurarse de que esta sobrevive.

Como yo nunca me había hecho un tatuaje, tuve que aprender sobre el proceso. Hoy en día los tatuajes se hacen con una máquina, pero históricamente (en Japón) se efectuaban con una varilla de bambú: un proceso más largo y doloroso. Me han dicho que aún es posible encontrar salones de tatuaje en Japón que emplean esta antigua técnica. Así es como lo

presentamos en la película.



Qué fórmula debía hacer de «fórmula del amor» era una gran pregunta. Debía ser lo suficientemente complicada (al fin y al cabo era la fórmula del amor) pero estéticamente agradable. Queríamos comunicar que una fórmula matemática podía ser bella tanto en su contenido como en su forma. Y yo quería que fuera *mi* fórmula.

Haciendo el *casting* para la fórmula del amor encontré esta:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega F(qz,\overline{qz}) = \sum_{m,\overline{m}=0}^{\infty} \int_{|z|<\epsilon^{-1}} \omega_{z\overline{z}}\, z^m \overline{z}^{\overline{m}} dz d\overline{z} \cdot \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m!\overline{m}!} \partial_z^m \partial_{\overline{z}}^{\overline{m}} F \Big|_{z=0}$$
$$+ q\overline{q} \sum_{m,\overline{m}=0}^{\infty} \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m!\overline{m}!} \partial_w^m \partial_{\overline{w}}^{\overline{m}} \omega_{w\overline{w}} \Big|_{w=0} \cdot \int_{|w|<q^{-1}\epsilon^{-1}} F\, w^m \overline{w}^{\overline{m}} dw d\overline{w}.$$

Aparece como fórmula (5.7) en un artículo de un centenar de páginas, «Instantons Beyond Topological Theory I» («Los instantones, más allá de la teoría topológica, I») que escribí en 2006 con dos buenos amigos, Andrei Losev y Nikita Nekrasov.[193]

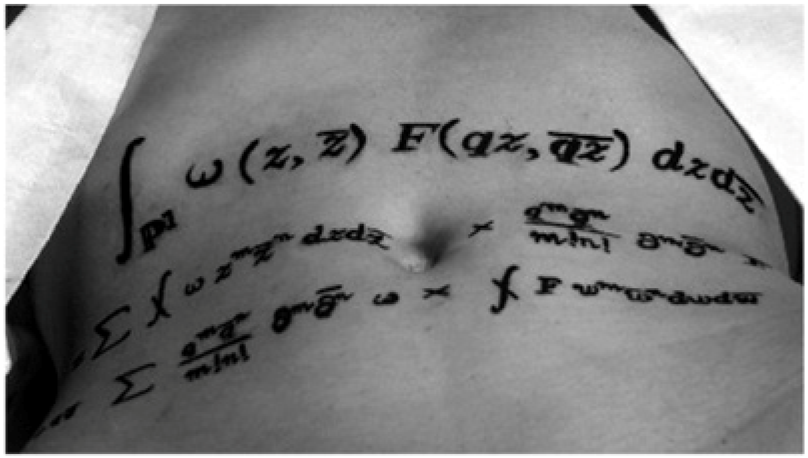
La ecuación parece lo suficientemente difícil como para que, si yo hiciera una película en la que escribiera la fórmula en una pizarra e intentara explicar su

significado, la mayoría del público se levantara de sus butacas y abandonara la sala. Pero verla en forma de tatuaje despierta una respuesta completamente diferente. Conseguí meterme bajo la piel de todo el mundo: la gente quería saber qué significaba.

Y ¿qué significa? Nuestro artículo fue el primero de una serie que escribimos acerca de un nuevo enfoque a teorías cuánticas de campos con «instantones», que son configuraciones de campos con propiedades notables. Aunque las teorías cuánticas de campos han tenido éxito a la hora de describir la interacción entre partículas elementales, aún hay muchos fenómenos importantes que no comprendemos del todo. Por ejemplo, según el Modelo Estándar, tanto los protones como los neutrones constan de tres quarks cada uno, que no se pueden separar. En física, a este fenómeno se le conoce como confinamiento. Aún carece de una explicación teórica adecuada, y muchos físicos creen que los instantones son la clave para resolver este misterio. Sin embargo, en el enfoque tradicional a teorías cuánticas de campos los instantones se muestran huidizos.

Nosotros propusimos un nuevo enfoque a las teorías cuánticas de campos que, esperamos, nos ayudase a comprender mejor los poderosos efectos de los instantones. La fórmula expresa una sorprendente identidad entre dos maneras de calcular una función de correlación en una de nuestras teorías.[194] Cuando la descubrimos no nos imaginábamos que pronto la emplearíamos en el papel de fórmula del amor.

A Oriane Giraud, nuestra especialista en efectos especiales, le gustó la fórmula, pero dijo que era demasiado enrevesada para un tatuaje. Yo simplifiqué la notación y así es como aparece finalmente en nuestra película:



La escena del tatuaje quería representar la pasión que hay en la investigación matemática. Mientras realiza el tatuaje, el matemático se aísla por completo del mundo. Para él, la fórmula se convierte en una cuestión de vida o muerte. Rodar la escena nos llevó muchas horas. Fue psicológica y físicamente agotador para mí y para Kayshonne Insixieng May, la actriz que interpreta a Mariko. Acabamos la escena a medianoche del último día de rodaje. Fue un momento muy emotivo para el equipo, unas treinta personas, tras todo lo que habíamos pasado juntos.

El estreno de la película tuvo lugar en abril de 2010, patrocinado por la Fondation Sciences Mathématiques de París, en el cine Max Linder Panorama, uno de los mejores de la capital francesa. Fue un éxito. Las primeras críticas de la película comenzaron a aparecer. *Le Monde* dijo que *Ritos de amor y matemáticas* era «un corto sorprendente» que «ofrece una inusual visión romántica de los matemáticos».[195] Yel *New Scientist* escribió:[196]

Es una película de gran belleza... Si el objetivo de Frenkel era acercar al público a las matemáticas, puede felicitarse por un trabajo bien hecho. La fórmula del amor, una versión simplificada de una ecuación que publicó en 2006 en un artículo acerca de teoría cuántica de campos titulado «Instantones más allá de la teoría topológica, I», pronto habrá sido vista (si no entendida) por una audiencia mucho mayor de la que, de otro modo, habría obtenido.

En palabras de la popular revista francesa *Tangente Sup*,[197] la película «intrigará a quienes piensen que las matemáticas son lo diametralmente opuesto al arte y la poesía». En un despiece que acompaña al artículo, Hervé Lehning escribió:

En las investigaciones matemáticas de Edward Frenkel, dualidad y simetría son de gran importancia. Están vinculadas al Programa Langlands, cuyo objetivo es tender un puente entre la teoría de números y representaciones de ciertos grupos. Este tema tan abstracto tiene aplicaciones, por ejemplo, en criptografía… Si la idea de dualidad es tan importante para Edward Frenkel, uno podría preguntarse si ve una dualidad entre amor y matemáticas, como parecería sugerir el título de su película. Su respuesta a esta pregunta está clara. Para él, la investigación matemática es como una historia de amor.

Desde entonces, el filme se ha exhibido en festivales de cine de Francia, España y California; en París, Kioto, Madrid, Santa Bárbara, Bilbao, Venecia… Las proyecciones y la subsiguiente publicidad me han proporcionado la oportunidad de ver algunas de las diferencias entre las «dos culturas». Al principio me resultó un *shock* cultural. Tan sólo un pequeño número de personas comprende plenamente mis matemáticas; a veces, al principio, no más de una docena en todo el mundo. Es más: dado que cada fórmula matemática representa una verdad objetiva, existe, fundamentalmente, sólo una manera de interpretar esa verdad. Por tanto, mi trabajo matemático se percibe de la misma manera sin importar quién lo lea. Por el contrario, nuestra película se dirigía a un público amplio: miles de personas estaban expuestas a ella. Y, evidentemente, cada una la interpretaba a su manera.

Lo que aprendí de esto es que el público forma siempre parte del proyecto artístico; todo se reduce, al final, al ojo del que mira. Un creador no tiene poder sobre las percepciones del público. Pero, por supuesto, esto es algo de lo que nos podemos beneficiar, puesto que cuando compartimos nuestras opiniones todos nos enriquecemos.

En nuestra película intentamos crear una síntesis de ambas culturas al hablar

de matemáticas desde una sensibilidad artística. Al comienzo del filme, Mariko escribe un poema al matemático.[198] Cuando, al final de la película, él le tatúa la fórmula, es su manera de corresponderle: para él, la fórmula es una expresión de su amor. Puede contener la misma carga emocional y pasional que un poema, de modo que era nuestra manera de mostrar el paralelismo entre matemáticas y poesía. Para el matemático, es su regalo de amor, el objeto de su creación, pasión, imaginación. Es como si le escribiera una carta de amor: recordemos al joven Galois escribiendo sus ecuaciones en la víspera de su muerte.

Pero ¿quién es ella? En el marco del mundo mítico que creamos, ella es la encarnación de la Verdad Matemática (de aquí su nombre, Mariko, «verdad» en japonés, y la razón de que la palabra *istina* cuelgue en forma de caligrafía de la pared). El amor que el matemático siente por ella simboliza su amor por las Matemáticas y por la Verdad, por las que se sacrifica. Pero ella ha de sobrevivir para llevar su fórmula, como si fuera su hijo.

La verdad matemática es eterna.

¿Pueden las matemáticas ser un lenguaje de amor? Algunos espectadores se mostraron incómodos ante la idea de una «fórmula del amor». Por ejemplo, una persona me dijo, tras ver la película:

—La lógica y los sentimientos no siempre van de acuerdo. Por eso decimos que el amor es ciego. Así que ¿cómo podría funcionar una fórmula?

En efecto, nuestros sentimientos y emociones a menudo nos parecen irracionales (aunque los científicos cognitivos nos dicen que algunos aspectos de esta aparente irracionalidad se pueden describir matemáticamente). Por lo tanto, no creo que haya una fórmula que describa o explique el amor. Cuando hablo de una conexión entre amor y matemáticas, no quiero decir que el amor se pueda reducir a términos matemáticos. Lo que quiero decir, en realidad, es que las matemáticas son mucho más que lo que la mayoría de nosotros creemos. Entre otras cosas, las matemáticas nos proporcionan una base racional y una capacidad adicional para amarnos mutuamente y al mundo que

nos rodea. Una fórmula matemática no explica el amor, pero puede transportar una carga de amor.

Como escribió la poetisa Norma Farber,[199]

Make me no lazy love...
Move me from case to case.
[«No me hagas un amor perezoso,
Conmúeveme de ocasión en ocasión»].

Las matemáticas nos conmueven «de ocasión en ocasión», y en ello reside su profunda, y en gran parte por descubrir, función espiritual.

Albert Einstein escribió:[200] «Todo aquel que se encuentra seriamente implicado en la investigación científica se convence de que algún espíritu se manifiesta en las leyes del Universo: un espíritu enormemente superior al del hombre, uno ante el cual nosotros, con nuestros modestos poderes, debemos sentirnos humildes». E Isaac Newton expresaba sus sentimientos así:[201] «Con respecto a mí, me siento como si hubiera sido tan sólo un niño jugando a orillas del mar, entreteniéndome con encontrar de vez en cuando un guijarro más pulido o una concha más bonita que las demás, mientras el gran océano de la verdad se extendía, aún ignoto, ante mí».

Mi sueño es que un día despertemos a esta realidad oculta. Puede que entonces podamos dejar de lado nuestras diferencias y centrarnos en las profundas verdades que nos unen. Entonces seremos todos como niños jugando en la playa, maravillados ante la deslumbrante belleza y armonía que descubramos, compartamos y atesoremos juntos.

Epílogo

Mi avión está aterrizando en el aeropuerto Logan, en Boston. Es enero de 2012. Vengo a la Reunión Anual Conjunta de la Sociedad Matemática Americana (AMS) y la Asociación Matemática de América. Me han invitado a pronunciar las Conferencias Colloquium 2012 de la AMS. Estas conferencias se han dado cada año desde 1896. Al mirar la lista de conferenciantes previos y los temas de sus clases magistrales uno revisita la historia de las matemáticas del último siglo: John von Neumann, Shiing-Shen Chern, Michael Atiyah, Raoul Bott, Robert Langlands, Edward Witten y tantos otros grandes matemáticos. Me siento honrado y humilde por formar parte de esta tradición.

Regresar a Boston desata recuerdos. Aterricé por primera vez en Logan en 1989 cuando vine a Harvard, parafraseando el famoso título de película, *Desde Rusia con matemáticas*. Por aquel entonces sólo tenía veintiún años, y no sabía qué esperar, qué iba a suceder. Tres meses después, madurando rápido en aquellos años turbulentos, regresaba a Logan a despedirme de mi mentor Boris Feigin, que regresaba a Moscú, preguntándome cuándo volvería a verlo. Lo cierto es que nuestra colaboración matemática y nuestra amistad continuaron y florecieron.

Mi estancia en Harvard resultó mucho más prolongada de lo que yo esperaba: obtuve mi doctorado al año siguiente; fui escogido para la Harvard Society of Fellows, y hacia el final de ese período, fui nombrado profesor asociado en Harvard. Cinco años después de mi llegada a Boston, esperé ansiosamente en Logan la llegada de mis padres y la familia de mi hermana, a fin de reunirnos y que se establecieran en Estados Unidos. Ellos han vivido en la zona desde entonces, pero me fui en 1997, cuando la Universidad de California, Berkeley, me hizo una oferta que no pude rechazar.

Aún visito Boston regularmente para ver a mi familia. El piso de mis padres está a sólo unas manzanas del Centro de Convenciones Hynes, donde se realiza la Reunión Conjunta, de modo que por primera vez tendrán ocasión de verme

en acción. ¡Qué hermoso regalo: poder compartir esta experiencia con mi familia! «¡Bienvenido a casa!».

La Reunión Conjunta Anual tiene más de siete mil asistentes inscritos: muy probablemente, la más numerosa hasta ahora. Muchos de ellos siguieron mis conferencias, que tuvieron lugar en un gigantesco salón de baile. Mis padres, mi hermana y mi sobrino están sentados en primera fila. Las conferencias versan sobre mi reciente trabajo conjunto con Robert Langlands y Ngô Bao Châu. Son los resultados de tres años de colaboración, nuestro intento de llevar más lejos las ideas del Programa Langlands.[202]

—¿Y si rodáramos una película acerca del Programa Langlands? —pregunto al público—. En ese caso, como cualquier guionista les diría que tendríamos que enfrentarnos a preguntas como estas: ¿Qué hay en juego? ¿Quiénes son los personajes? ¿Cuál es la cronología? ¿Cuáles son los conflictos? ¿Cómo se resuelven?

El público sonríe. Hablo acerca de André Weil y su piedra Rosetta. Nos lanzamos en un viaje a través de diferentes continentes del mundo de las matemáticas, y examinamos las misteriosas conexiones entre ellos.

Con cada clic del mando a distancia, cuatro gigantescas pantallas muestran la siguiente dispositiva. Cada una de ellas describe un pequeño paso en nuestra eterna búsqueda de conocimiento. Sopesamos atemporales cuestiones acerca de la verdad y la belleza. Y cuanto más aprendemos de las matemáticas (este mágico universo oculto) más nos damos cuenta de cuán poco sabemos, y cuánto más queda por descubrir. Nuestro viaje continúa.

Agradecimientos

Agradezco a DARPA y a la Fundación Nacional para la Ciencia su apoyo a parte de las investigaciones que describo en este libro. Este se completó mientras yo era profesor Miller en el Instituto Miller para Investigación y Ciencia Básicas de la Universidad de California, Berkeley.

Agradezco a mi editor T. J. Kelleher y a la editora de proyecto Melissa Veronesi, de Basic Books, por su experta orientación.

Mientras trabajaba en el libro, aproveché fructíferas conversaciones con Sara Bershtel, Robert Brazell, David Eisenbud, Marc Gerald, Masako King, Susan Rabiner, Sasha Raskin, Philibert Schogt, Margit Schwab, Eric Weinstein y David Yezzi.

Agradezco a Alex Freedland, Ben Glass, Claude Levesque, Kayvan Mashayekh y Corine Trang, que leyeron partes del libro en diferentes etapas y me ofrecieron consejos útiles. Le estoy agradecido a Andrea Young por haber tomado las fotos del «truco del vaso» empleadas en el capítulo 15.

Debo un agradecimiento especial a Thomas Farber por numerosas sugerencias y sus expertos consejos, y a Marie Levek por leer el manuscrito y hacerme preguntas que me ayudaron a mejorar la presentación en numerosos lugares.

Mi padre, Vladimir Frenkel, leyó las muchas versiones del manuscrito y su opinión me resultó valiosísima.

La deuda con mis profesores, mentores y otras personas que me ayudaron en mi carrera queda, espero, suficientemente clara a partir de la historia que he contado.

Por encima de todo, mi gratitud es para con mis padres, Lidia y Vladimir Frenkel, cuyo amor y apoyo hizo posible todo lo que he conseguido. Les dedico el libro a ellos.

Glosario

Álgebra de Lie	Espacio tangente a un grupo de Lie en el punto correspondiente al elemento identidad de este grupo.
Álgebra Kac-Moody	El álgebra de Lie del grupo de lazos de un grupo de Lie dado, extendida por una recta extra.
Análisis armónico	Rama de las matemáticas que estudia la descomposición de las funciones en términos de armónicos, como las funciones seno y coseno.
Aplicación	de un conjunto (o variedad) *M* a otro conjunto (o variedad) *N*. Regla que asigna un punto de *N* a cada punto de *M*. A veces se le denomina «mapeado».
Categoría	Estructura algebraica compuesta por «objetos» y «morfismos» entre cualquier par de objetos. Por ejemplo, los espacios vectoriales forman una categoría, como también los haces sobre una variedad.
Circunferencia	Variedad que puede describirse como el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes a un punto dado.
Composición (de dos simetrías)	La simetría de un objeto dado que se obtiene al aplicar dos simetrías de ese mismo objeto, una después de la otra.
Conjetura Shimura-Taniyama-Weil	Afirmación de que existe una correspondencia uno a uno entre las ecuaciones cúbicas y las formas modulares que satisface ciertas propiedades. Bajo esta correspondencia, los números de soluciones de la ecuación cúbica en módulo números primos son iguales a los coeficientes de la forma modular.
Conjunto	Colección de objetos, como el conjunto {0,1,2..., *N* - 1} para un número natural *N* dado.
Correspondencia	Relación entre objetos de dos tipos diferentes, o una regla que asigna objetos de un tipo a objetos de otro. Por ejemplo, una correspondencia uno a uno.
Cuerpo finito	El conjunto de números naturales entre 0 y *p* - 1, en que *p* es un número primo, o su extensión obtenida al añadir soluciones de una ecuación polinómica de una variable.
Cuerpo numérico	Sistema numérico obtenido al añadir, a los números racionales, todas las soluciones de una colección finita de polinomios de una variable cuyos coeficientes son números racionales.

Curva sobre un cuerpo finito	Objeto algebraico que comprende todas las soluciones de una ecuación algebraica en dos variables (por ejemplo, una ecuación cúbica) con valores en un cuerpo finito de p elementos y todas sus extensiones.
Dimensión	Número de coordenadas necesarias para describir puntos de un objeto dado. Por ejemplo, una recta y una circunferencia tienen dimensión uno, mientras que un plano y una superficie esférica tienen dimensión dos.
Dualidad	Equivalencia entre dos modelos (o teorías) bajo un intercambio prescrito de parámetros y objetos.
Ecuación cúbica	Nos referimos a las ecuaciones de grado 3 cuya ecuación con la forma $P(y) = Q(x)$, en que $P(y)$ es un polinomio de grado dos y $Q(x)$ es un polinomio de grado tres. Un ejemplo, estudiado en detalle en este libro, es la ecuación $$y^2 + y = x^3 - x^2.$$
Ecuación polinómica	Una ecuación de forma $P = 0$, en que P es un polinomio de una o más variables.
Entero	Un número que es bien un número natural, o 0, o el negativo de un número natural.
Esfera	Variedad que se puede describir como el conjunto de todos los puntos de un espacio plano tridimensional que son equidistantes con respecto a un punto dado.
Espacio de móduli de Hitchin	El espacio (o variedad) cuyos puntos son representaciones del grupo fundamental de una superficie de Riemann dada en un grupo de Lie dado.
Espacio vectorial	Conjunto de todos los vectores en un espacio plano n-dimensional dado, con las operaciones de suma de vectores y multiplicación de vectores por números, y que satisface propiedades naturales.
Fibración	Supongamos que tenemos dos variedades M y B, y una aplicación de M a B. Para todo punto en B tenemos el conjunto de puntos en M que mapean a este punto, llamados «fibra» de este punto. A M se le denomina una fibración (o haz de fibras) sobre la base B si todas estas fibras pueden identificarse con las demás (y cada punto en B posee un entorno U cuya preimagen en M puede identificarse con el producto de U y una fibra).

Forma modular	Función en el disco unidad que satisface ciertas propiedades especiales de transformación bajo un subgrupo del grupo de simetrías del disco (llamado grupo modular).
Función	Regla que asigna un número a cada punto de un conjunto o variedad dada.
Función automorfa	Un tipo especial de función que aparece en análisis armónico.
Grupo	Un conjunto con una operación (que puede denominarse composición, suma o multiplicación) que asigna un elemento de este conjunto a cualquier par de elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros con la operación de suma. Esta operación ha de satisfacer las siguientes propiedades: la existencia de un elemento identidad, la existencia de un inverso para cada elemento y la asociatividad.
Grupo abeliano	Un grupo en el que el resultado de la multiplicación de dos elementos cualesquiera no depende del orden en que estos se multipliquen. Por ejemplo, el grupo circular.
Grupo circular	Grupo de las rotaciones de un objeto circular, como por ejemplo, una mesa redonda. Se trata de un círculo con un elemento especial, el elemento identidad del grupo. El grupo circular es el ejemplo más sencillo de grupo de Lie.
Grupo de Galois	El grupo de simetrías de un cuerpo numérico que conservan las operaciones de suma y multiplicación.
Grupo de gauge	Un grupo de Lie que aparece en una teoría de gauge dada y determina, en especial, las partículas y las interacciones entre ellas dentro de esa teoría.
Grupo de Lie	Grupo que es también una variedad, de tal modo que la operación del grupo da lugar a una aplicación diferenciable.
Grupo fundamental	Grupo de todos los caminos cerrados continuos sobre una variedad dada que comienzan y acaban en un punto dado.
Grupo Langlands dual	Un grupo de Lie asignado a cualquier grupo G de Lie dado mediante un procedimiento especial. Se señala como ${}^{L}G$.
Grupo no abeliano	Grupo en el que el resultado de la multiplicación de dos elementos depende en general del orden en el que se multiplican. Por ejemplo, el grupo SO(3).
Haz	Regla que asigna un espacio vectorial a cada punto de una variedad

	dada, satisfaciendo ciertas propiedades naturales.
Haz automorfo	Un haz que reemplaza a la función automorfa en la relación geométrica Langlands en la columna de la derecha de la piedra Rosetta de Weil.
Lazo	Curva cerrada, por ejemplo, una circunferencia.
Número complejo	Número con la forma $a+b\sqrt{-1}$, siendo a y b dos números reales.
Número natural	Número 1 o cualquier número obtenido al añadir 1 a sí mismo varias veces.
Número primo	Número natural que no es divisible por ningún otro número natural excepto 1 y él mismo.
Polinomio de una variable	Una expresión de tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde x es una variable y a_n, $a_{n-1} \ldots, a_1$, a_0, son números. Los polinomios de más variables se definen de forma parecida.
Relación (o correspondencia) Langlands	Regla que asigna una función automorfa (o una representación automorfa) a una representación de un grupo de Galois.
Representación de un grupo	Regla que asigna una simetría de un espacio vectorial a cada elemento de un grupo dado de tal manera que se satisfacen ciertas propiedades naturales. De un modo más general, una representación de un grupo G en otro grupo H es una regla que asigna un elemento de H a cada elemento de G, de tal modo que se satisfacen ciertas propiedades naturales.
Simetría	Transformación de un objeto dado que conserva sus propiedades, como forma y posición.
SO(3)	Grupo de rotaciones de una esfera.
Supersimetría	Tipo de simetría en una teoría cuántica de campos que intercambia bosones y fermiones.
Teoría	Rama especial de las matemáticas o la física, por ejemplo, teoría de números; o bien un modelo específico que describe relaciones entre objetos, como la teoría de gauge con el grupo de gauge SO(3).
Teoría cuántica de campos	Este término puede hacer referencia a dos cosas distintas. En primer lugar, puede tratarse de la rama de la física que estudia modelos de interacciones entre partículas y campos cuánticos. En segundo lugar, puede tratarse de un modelo en *particular* de este tipo.
Teoría de gauge	Modelo físico de un tipo especial, que describe ciertos cuerpos y las

	interacciones entre ellos. Hay una teoría (o modelo) de ellas por cada grupo de Lie, llamado grupo de gauge. Por ejemplo, la teoría de gauge correspondiente al grupo circular es la teoría del electromagnetismo.
Último teorema de Fermat	La afirmación de que para todo número natural n mayor a 2, no hay números naturales x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$.
Variedad	Forma geométrica lisa, como una circunferencia, una superficie esférica o la superficie de un donut.

---

[1] Frenkel, Edward, «Don't let Economists and Politicians Hack Your Math», *Slate*, 8 de febrero de 2013, slate.me.

[2] Créditos de la imagen: Physics World, www.hk-phy.org.

[3] Créditos de la imagen: Arpad Horvath.

[4] En esta explicación empleamos la expresión «simetría de un objeto» para describir una transformación especial que conserva este objeto, como la rotación de una mesa. No decimos, pues, «simetría de un objeto» en el sentido de que este sea simétrico.

[5] Si empleamos la rotación en sentido horario, obtenemos el mismo conjunto de rotaciones: la rotación en sentido horario a 90 grados es la misma que la rotación en sentido contrario al horario por 270 grados, etc. Los matemáticos emplean, por convención, las rotaciones en sentido contrario a las agujas del reloj, pero es tan sólo cuestión de elección.

[6] Esto puede parecer superfluo, pero no intento ser pedante. Hay que incluirlo, si hemos de ser coherentes. Hemos dicho que una simetría es una transformación que conserva nuestro objeto, y la identidad es una transformación así. Para evitar confusiones, quiero recalcar que en esta explicación tan sólo nos preocupa el resultado final de una simetría dada. Lo que le hagamos al objeto durante el proceso no importa: tan sólo las posiciones finales de todos los puntos en el objeto importan. Por ejemplo, si rotamos la mesa 360 grados, todos los puntos de la mesa acaban en la misma posición que tenían originalmente. Es por eso por lo que, para nosotros, una rotación de 360 grados es lo mismo que ninguna rotación en absoluto. Por esa misma razón, una rotación de 90 grados en sentido contrario al horario es lo mismo que una rotación en sentido horario de 270 grados. A modo de ejemplo adicional, supongamos que desplazamos la mesa, sobre el suelo, a tres metros de distancia de donde estaba y que la volvemos a desplazar hasta su emplazamiento original, y que cada uno de sus puntos acaba en la misma posición en que estaba al principio: a esto se le considera la misma simetría que la simetría original.

[7] Hay una importante propiedad que cumple la composición de simetrías, que es la asociatividad: dadas tres simetrías, S, S' y S'', tomar su composición con dos órdenes diferentes (S ? S') ? S'' y S ? (S' ? S'') da el mismo resultado. Esta propiedad está incluida en la definición formal de grupo como axioma adicional. No la menciono en el texto principal del libro porque en los grupos que empleamos queda evidentemente satisfecha.

[8] Cuando hablábamos sobre las simetrías de una mesa cuadrada, nos resultó cómodo identificar las cuatro simetrías con las cuatro esquinas de la mesa. Sin embargo, tal identificación depende de la elección de una de las esquinas (la que representa la simetría identidad). Una vez efectuada esta elección podemos, en efecto, identificar cada simetría con la esquina en la que la esquina escogida es transformada por esta simetría. El inconveniente es que si escogemos una esquina diferente para representar la simetría identidad, obtenemos una identificación diferente. Por lo tanto, es mejor diferenciar claramente entre las simetrías de una mesa y las esquinas de esa mesa.

[9] Véase Carroll, Sean M., *The Particle at the End of the Universe: How the Hunt for the Higgs Boson Leads Us to the Edge of a New World*, Dutton, 2012.

[10] El matemático Felix Klein empleó la idea de que las formas están determinadas por sus propiedades de simetría como punto de partida de su muy influyente Programa de Erlangen, en 1872, en el que declaraba que los rasgos característicos de cualquier geometría están determinados por un grupo de simetrías. Por ejemplo, en la geometría euclidiana, el grupo de simetrías consiste en todas las transformaciones del espacio euclidiano que conservan las distancias. Estas transformaciones son composiciones de rotaciones y traslaciones. Las geometrías no euclidianas corresponden a otros grupos de simetrías. Esto nos permite clasificar posibles geometrías mediante la clasificación de los grupos de simetrías relevantes.

[11] Esto no significa que no haya aspectos de una afirmación matemática que queden exentos de interpretación; por ejemplo, preguntas como cuán importante es una afirmación dada, cuán ampliamente aplicable, cuántas consecuencias tendrá para el desarrollo de las matemáticas, etcétera, pueden someterse a debate. Pero el significado de la afirmación (lo que dice exactamente) no está abierto a interpretación si la afirmación posee coherencia lógica. La coherencia lógica de una afirmación no está sujeta a debate, tampoco, una vez escogido el sistema de axiomas dentro del que enmarcamos la afirmación.

[12] Nótese que cada rotación da lugar también a una simetría en cualquier objeto redondo, como una mesa redonda.

Por tanto, en principio, uno podría hablar de una representación del grupo de rotaciones por simetrías en una mesa redonda en lugar de en un plano. Sin embargo, en matemáticas el término «representación» se reserva específicamente para la situación en que un grupo dado da lugar a simetrías de un espacio *n*-dimensional. Estas simetrías han de ser lo que los matemáticos llaman transformaciones lineales, un concepto que se explica en la nota 2 del capítulo 14.

[13] Para todo elemento *g* del grupo de rotaciones, se señala la correspondiente simetría del espacio *n*-dimensional con S_g. Ha de ser una transformación lineal para todo *g*, y han de satisfacerse las siguientes propiedades: primero, para todo par de elementos del grupo, *g* y *h*, la simetría $S_{g \cdot h}$ ha de ser igual a la composición de las simetrías S_g y S_h. Y, en segundo lugar, la simetría correspondiente al elemento identidad del grupo ha de ser la simetría identidad del plano.

[14] Posteriormente se descubrió que había más quarks, llamados «encanto», «cima» y «fondo», así como sus correspondientes antiquarks.

[15] Había también una sinagoga semioficial en Marina Rosha. La situación mejoró tras la *perestroika*, cuando abrieron más sinagogas y centros judíos en Moscú y otras ciudades.

[16] Saul, Mark, «Kerosinka: an episode in the history of Soviet mathematics», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, noviembre de 1999, pp. 1217-1220. Disponible *online* en www.ams.org (inglés).

[17] Szpiro, George G., «Bella Abramovna Subbotovskaya and the “Jewish People’s University”», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 54, noviembre de 2007, pp. 1326-1330. Disponible *online* en www.ams.org (inglés).

[18] Alexander Shen ofrece una lista de algunos de los problemas que se entregaban a los estudiantes judíos en los exámenes de ingreso a la MGU en su artículo «Entrance examinations to the Mekh-Mat», *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n.º 4, 1994, pp. 6-10. El artículo se encuentra reimpreso en Shifman, M. (ed.), *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein*, World Scientific, Nueva Jersey/Singapur, 2005, disponible *online* en www.ftpi.umn.edu. Véanse otros artículos acerca de los exámenes de ingreso a la MGU en este libro, especialmente los de I. Vardi y A. Vershik.

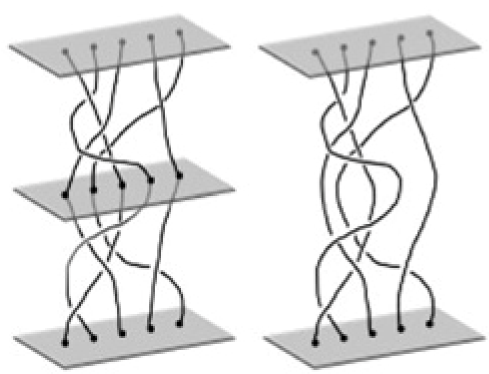
[19] Szpiro, George G., *Ibid.*

[20] Saul, Mark, *Ibid.*

[21] La historia de la Universidad Popular Judía y las circunstancias de la muerte de Bella Muchnik Subbotovskaya se cuentan en los artículos de D. B., Fuchs *et al.* en Shifman, M. (ed.), *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein*, World Scientific, Nueva Jersey/Singapur, 2005. Véase también Szpiro, George G., *Ibid.*

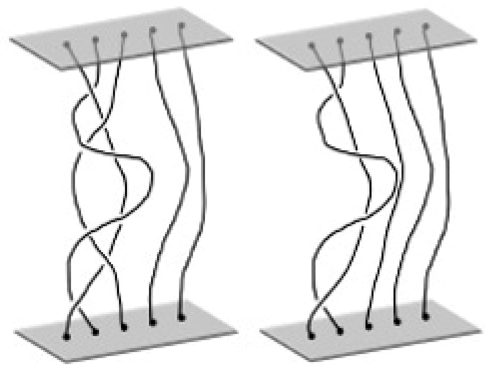
[22] Si ponemos la trenza identidad sobre otra trenza y retiramos las placas centrales, regresaremos a la trenza original tras acortar las hebras. Esto significa que el resultado de sumar una trenza *b* a la trenza identidad es la misma hebra *b*.

[23] Así es como se ven la suma de una trenza y su imagen especular:

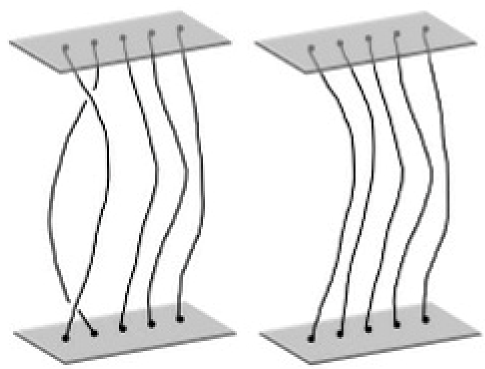


Ahora, en la trenza que se muestra a la derecha de la imagen, tiramos hacia la derecha de la hebra que comienza y acaba en el «clavo» más a la derecha. Con esto obtenemos la trenza a la izquierda de la imagen inferior.

Luego hacemos lo mismo con la hebra que comienza y acaba en el tercer clavo de esta trenza. Obtenemos la hebra de la derecha de la imagen inferior:

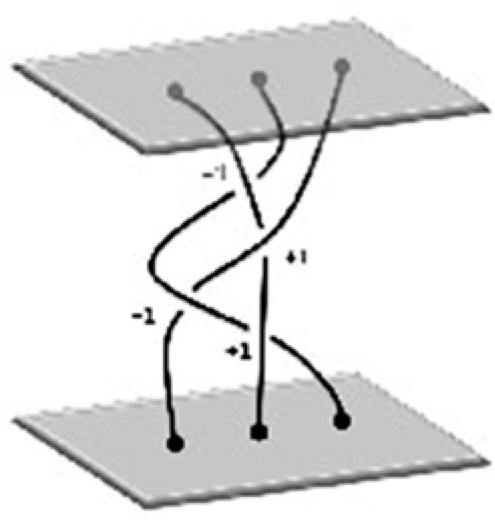


Acto seguido, tiramos hacia la izquierda la hebra que comienza y acaba en el segundo clavo. En la trenza resultante hay un aparente solapamiento entre la primera y la segunda hebra. Pero se trata de una ilusión: al tirar de la segunda hebra hacia la derecha eliminamos este solapamiento. Estos movimientos se muestran en la siguiente imagen. La trenza resultante, en el lado derecho de la imagen inferior, no es sino la trenza identidad que vimos arriba. Para ser más precisos, a fin de obtener la trenza identidad necesitaremos enderezar las hebras, ya que nuestras reglas lo permiten (también deberíamos acortarlas, para que nuestra trenza tenga la misma altura que la trenza original). Nótese que en ningún paso hemos cortado ni cosido las hebras o permitido que una atraviese a otra.



[24] Esta es una buena oportunidad para hablar de la diferencia entre «definición» y «teorema». En el capítulo 2 vimos la definición de un grupo. Se trata de un conjunto dotado con una operación (llamada, de modo variable, composición, suma o multiplicación, dependiendo de las circunstancias) que satisface las siguientes propiedades (o axiomas): hay un elemento identidad en el conjunto (en el sentido explicado en el capítulo 2); todo elemento del conjunto tiene un inverso, y la operación satisface la propiedad de asociatividad descrita en la nota 4 del capítulo 2.
Una vez tenemos esta *definición*, la noción de grupo queda fijada para siempre. No se nos permite realizar ningún cambio en ella.
Ahora, dado un conjunto, podemos intentar dotarlo de la estructura de grupo. Esto supone construir una operación en este conjunto y demostrar que esta operación satisface todas las propiedades arriba enumeradas. En este capítulo tomamos el conjunto de todas las trenzas con *n* trenzas (identificamos las trenzas obtenidas tirando de las hebras, como se explica en el texto principal) y construimos la operación de suma de dos trenzas tales, según la regla descrita en el texto principal. Nuestro *teorema* es la afirmación de que esta operación satisface todas las propiedades exigidas. La prueba de este teorema consiste en la verificación directa de estas propiedades. Hemos comprobado las dos primeras propiedades (véase notas 2 y 3, respectivamente) y la última propiedad (asociatividad) se sigue automáticamente de la construcción de suma de dos trenzas.
[25] Dado que una de nuestras reglas es que una trenza no puede atravesarse a sí misma, la hebra única que tenemos no puede ir sino directamente del clavo en la placa superior al clavo de la placa inferior. Evidentemente podría seguir un camino intrincado, como un sendero de montaña o una calle llena de curvas, pero al acortarlo, de ser necesario, podemos hacer que la hebra baje en vertical. Dicho de otra manera, el grupo B_1 consiste en un solo elemento, que es la identidad (y que es también su propio inverso y el resultado de la suma consigo mismo).
[26] En jerga matemática, decimos que «el grupo de trenzas B_2 es isomorfo al grupo de enteros». Esto significa que hay una correspondencia uno a uno entre ambos grupos, es decir, que asignamos a cada trenza el número de superposiciones, de modo que la suma de trenzas (en el sentido arriba descrito) corresponde a la suma habitual de enteros. En efecto, al colocar dos trenzas una encima de la otra, obtenemos una nueva trenza en la que el número de superposiciones es igual a la suma de esos números asignados a las dos trenzas originales. Es más; la trenza identidad, en la que no se da ninguna superposición de hebras, corresponde al entero 0, y tomar la trenza inversa equivale a tomar el negativo del entero.

[27] Véase Garber, David, *Braid Group Cryptography*, en Berrick, A. John *et al.*, (ed.), *Braids: Introductory Letters on Braids, Configurations and Their Applications*, World Scientific, 2010. Disponible en arxiv.org.
[28] Véase, por ejemplo, Collins, Graham, «Computing With Quantum Knots», *Scientific American*, abril de 2006, pp. 57-63.
[29] Sumners, De Witt, Ernst, Claus, Spengler, Sylvia J. y Nicholas R. Cozzarelli, «Analysis of the mechanism of DNA recombination using tangles», *Quarterly Reviews of Biophysics*, vol. 28, agosto de 1995, pp. 253-313. Y Vasquez, Mariel, y DeWitt Sumners, «Tangle analysis of Gin recombination», *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 136, 2004, pp. 565-582.
[30] Una afirmación más precisa, de la que hablaremos en el capítulo 9, es que el grupo de trenzas B_n es el grupo fundamental del espacio de *n* puntos distintos y sin ordenar en el plano. He aquí una útil interpretación de los conjuntos de *n* puntos distintos y sin ordenar en el plano en términos de polinomios de grado *n*. Veamos un polinomio mónico de segundo grado $x^2 + a_1x + a_0$ en que *a*0 y *a*1 son números complejos (en este caso «mónico» significa que el coeficiente del término con la mayor potencia de *x*, es decir, x^2, es igual a 1). Posee dos raíces, que son números complejos, y, a la inversa, estas raíces determinan de modo único un polinomio mónico de segundo grado. Los números complejos se pueden representar como puntos sobre un plano (véase el capítulo 9) de modo que un polinomio mónico de segundo grado con dos raíces distintas es lo mismo que un par de puntos distintos en el plano.
De igual manera, un polinomio mónico de grado *n*, $x^n + a_{n-1}x^{n-1} +\ldots+ a_1x + a_0$, con *n* raíces complejas distintas, es lo mismo que un conjunto de *n* puntos en el plano: sus raíces. Fijemos un polinomio así $(x - 1)(x - 2)\ldots(x - n)$, con las raíces 1, 2, 3… , *n*. Un camino en el espacio de todos los polinomios, que comience y acabe en el polinomio $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, puede visualizarse como una trenza con *n* hebras, siendo cada una de estas hebras la trayectoria de una raíz en particular. De aquí que hallemos que el grupo de trenzas B_n es el grupo fundamental del espacio de polinomios de grado *n* con raíces distintas (véase el capítulo 14).
[31] A cada superposición entre dos hebras, le asignamos +1 si la hebra que viene desde la izquierda pasa por debajo de la que viene de la derecha; le asignamos -1 si se da el caso opuesto. Veamos, por ejemplo, esta trenza:



Al sumar estos números (+1 y-1) a todas las superposiciones, obtenemos el número total de superposiciones de una trenza dada. Si ajustamos las hebras, siempre añadiremos o eliminaremos el mismo número de superposiciones +1 que el número de superposiciones -1, de modo que el número total de superposiciones permanecerá invariable. Esto significa que el número total de superposiciones está *bien definido*: no cambia cuando ajustamos la trenza.
[32] Nótese que el número total de superposiciones de la trenza obtenida a partir de la suma de dos trenzas será igual a la suma de todas las superposiciones de esas dos trenzas. Por lo tanto, la suma de dos trenzas con un total de superposiciones de 0 será, nuevamente, una trenza con un total de superposiciones de 0. El grupo conmutador B'_n comprende todas esas trenzas. En cierto sentido muy preciso, es la parte no abeliana maximal del grupo de trenzas B_n.
[33] El concepto de «números de Betti» surgió en topología, el estudio matemático de los rasgos notables de las formas geométricas. Los números de Betti de una forma geométrica dada, como un círculo o una esfera, forman una secuencia de números $b_0,b_1,b_2\ldots$ cada uno de los cuales puede ser 0 o un número natural. Por ejemplo, para un espacio plano, como una recta, un plano, etc., $b_0 = 1$, y todos los demás números de Betti son iguales a 0. En general, b_0 es el número de componentes de la forma geométrica conectados. Para el círculo, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ y los demás números de Betti son 0. El que b_1, el primer número de Betti, sea igual a 1 refleja la presencia de un objeto unidimensional no trivial. Para la esfera, $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ y $b_2 = 1$, y los demás números de Betti son iguales a 0. Aquí, b_2 refleja la presencia de un objeto bidimensional no trivial.
Los números de Betti del grupo de trenzas B_n se definen como los números de Betti del espacio de polinomios mónicos

de grado n con n raíces distintas. Los números de Betti del subgrupo conmutador B'_n son los números de Betti de un espacio íntimamente relacionado. Consiste en todos los polinomios de grado n con n raíces distintas y la propiedad adicional de que su discriminante (la raíz cuadrada del producto de las diferencias entre todos los pares de raíces) toma un valor fijo distinto a cero (por ejemplo, podemos decir que su valor es 1). Por ejemplo, el discriminante del polinomio $x^2 + a_1x + a_0$ es igual a a^{21} $-4a_0$, y hay una fórmula similar para todos los valores de n.
De esta definición se desprende que el discriminante de un polinomio es igual a cero si, y sólo si, tiene múltiples raíces. Por lo tanto, el discriminante nos ofrece una aplicación del espacio de todos los polinomios mónicos de grado n con raíces distintas al plano complejo sin el punto 0. Por lo tanto, obtenemos una «fibración» de este espacio sobre el plano complejo sin el origen. Los números de Betti de B'_n reflejan la topología de cualquiera de esas fibras (topológicamente, son iguales) mientras que los números de Betti de B_n reflejan la topología del espacio entero. Fue el deseo de comprender la topología de las fibras, en primer lugar, lo que motivó a Varchenko a sugerirme a mí este problema.
Para más información acerca de los números de Betti y los conceptos relacionados de homología y cohomología, puede consultar los siguientes libros introductorios: Fulton, William, *Algebraic Topology: A First Course*, Springer, Nueva York, 1995. Y Hatcher, Allen, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[34] Algunas personas han sugerido la posibilidad de que Fermat se estuviera «tirando un farol» cuando dejó esa nota en el margen del libro. Yo no lo creo: me parece que cometió un error sincero. En cualquier caso, deberíamos estarle agradecidos: su pequeña nota en el margen ha tenido, sin duda, un impacto positivo en el desarrollo de las matemáticas.

[35] Para ser más precisos, demostré que para todo divisor d de n, el q-ésimo número de Betti, donde $q = n(d-2)/d$, es igual a $\varphi(d)$, y que todo divisor d de n-1, el q-ésimo número de Betti donde $q = (n-1)(d-2)/d$, es igual a $\varphi(d)$. Todos los demás números de Betti de B'_n son iguales a cero.

[36] En 1985, Mijaíl Gorbachov llegó al poder, y poco después lanzó su política de *perestroika*. Hasta donde yo sé, la discriminación sistemática hacia los judíos en las pruebas de admisión del Mekh-Mat, como la que yo experimenté, dejó de existir hacia 1990.

[37] Zdravkovska, S., y P. Duren, «Golden Years of Moscow Mathematics», *American Mathematical Society*, 1993, p. 221.

[38] El matemático Yuly Ilyashenko aseguraba que este acontecimiento fue el causante de que se instauraran las políticas de discriminación antisemita en el Mekh-Mat, en la entrevista titulada «Los 20 años negros de Mekh-Mat», publicada en la página web Polit.ru el 28 de julio de 2009: www.polit.ru.

[39] El problema era hallar de cuántas maneras unir los lados de un polígono regular con $4n$ lados para obtener una superficie de Riemann de género n. En el capítulo 9 tratamos una manera especial de hacerlo cuando identificamos los lados opuestos de un polígono.

[40] Frenkel, Edward, «Cohomology of the commutator subgroup of the braid group», *Functional Analysis and Applications*, vol. 2, 1988, pp. 248-250.

[41] Entrevista con Robert Langlands para la *Mathematical Newsletter*, Universidad de Columbia Británica (2010). Versión íntegra en: www.polit.ru.

[42] Supongamos que existen números naturales m y n tales que $\sqrt{2} = m/n$. Podemos suponer también, sin pérdida de generalidad, que los números m y n son coprimos, es decir, que no son simultáneamente divisibles por ningún número natural que no sea 1. De otra manera, tendríamos que $m = dm'$ y $n = dn'$, y por lo tanto $\sqrt{2} = m'/n'$. Este proceso puede repetirse, si se desea, hasta llegar a los dos números coprimos.
Así pues, supongamos que $\sqrt{2} = m/n$, donde m y n son coprimos. Elevando ambos lados de la fórmula $\sqrt{2} = m/n$ al cuadrado obtenemos $2 = m^2/n^2$. Si multiplicamos ambos lados por n^2, obtenemos $m^2 = 2n^2$. Esto implica que m es par, porque si fuera impar, m^2 sería también impar, lo que iría en contradicción con esta fórmula.
Si m es par, $m = 2p$ para algún número natural p. Realizando las sustituciones en la anterior fórmula, tenemos que $4p^2 = 2n^2$, por lo tanto, $n^2 = 2p^2$. Pero en tal caso n ha de ser también par, según la misma argumentación empleada para demostrar que m es par. Así, tanto m como n son pares, lo que contradice nuestra teoría de que m y n son coprimos. Por lo tanto, m y n como tales no existen.
Esto constituye un buen ejemplo de «reducción al absurdo». Comenzamos con la afirmación contraria a lo que intentamos demostrar (en nuestro caso, comenzamos con la afirmación de que $\sqrt{2}$ es un número racional, que es lo opuesto a lo que queremos probar. Si esto implica una falsa afirmación (en nuestro caso, implica que tanto m como n son pares, pese a que habíamos supuesto que serían coprimos) podemos deducir que la afirmación con la que empezamos es también falsa. De aquí que la afirmación que intentábamos demostrar (que $\sqrt{2}$ no es un número racional) es cierta. Emplearemos nuevamente este método en el capítulo 8: primero, cuando hablemos de la prueba del último teorema de Fermat, y de nuevo, en la nota 6, cuando expongamos la prueba de Euclides de que hay infinitos números primos.

[43] Por ejemplo, multipliquemos estos dos números: ½ + $\sqrt{2}$ y 3 - $\sqrt{2}$.

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)(3-\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 3-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}.$$

Pero $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, de modo que, simplificando, obtenemos la siguiente respuesta:

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Es un número del mismo tipo, de modo que pertenece, en efecto, a nuestro nuevo sistema numérico. Sencillamente despejamos paréntesis:

[44] Sólo tenemos en cuenta las simetrías de nuestro sistema numérico que son compatibles con las operaciones de suma y multiplicación, y tales que 0 vaya a 0, 1 vaya a 1, inverso por la suma a inverso por la suma e inverso por la multiplicación a inverso por la multiplicación. Pero si 1 va a 1, entonces 2 = 1 + 1 debe ir a 1 + 1 = 2. De igual modo, todos los números naturales deben conservarse y, por lo tanto, lo mismo para con sus negativos e inversos por la multiplicación. Por lo tanto, estas simetrías conservan todos los números racionales.

[45] Es fácil comprobar que, en efecto, esta simetría es compatible con suma, resta, multiplicación y división. Hagámoslo con la operación de suma: pensemos en dos números diferentes de nuestro nuevo sistema numérico,

$$x+y\sqrt{2} \quad \text{y} \quad x'+y'\sqrt{2},$$

en que x, y, x' e y' son números racionales. Sumémoslos:

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)+\left(x'+y'\sqrt{2}\right)=\left(x+x'\right)+\left(y+y'\right)\sqrt{2}.$$

Podemos aplicar nuestra simetría a ambos. Así, tenemos:

$$x-y\sqrt{2} \quad \text{y} \quad x'-y'\sqrt{2}.$$

Ahora sumémoslos:

$$\left(x-y\sqrt{2}\right)+\left(x'-y'\sqrt{2}\right)=\left(x+x'\right)-\left(y+y'\right)\sqrt{2}.$$

Vemos que el número que obtenemos es igual al que obtuvimos al aplicar la simetría a nuestra suma original:

$$\left(x+x'\right)+\left(y+y'\right)\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \left(x+x'\right)-\left(y+y'\right)\sqrt{2}.$$

Dicho de otra manera, podemos aplicar la simetría a cada uno de los números, individualmente, y sumarlos. O podemos sumarlos primero y después aplicar la simetría. El resultado será el mismo. Esto es lo que significa que nuestra simetría sea compatible con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

[46] Por ejemplo, en el caso del cuerpo numérico obtenido al añadir √2 a los números racionales, el grupo de Galois comprende dos simetrías: la identidad y la simetría obtenida al intercambiar √2 y -√2. Señalemos la identidad como *I* y la simetría en el intercambio entre √2 y -√2 como *S*. Escribamos explícitamente cómo son las composiciones de estas simetrías:

I ? *I* = *I*, *I* ? *S* = *S*, *S* ? *I* = *I*,

y la más interesante de todas,
S ? *S* = *I*.

En efecto, si intercambiamos √2 y -√2 y luego volvemos a hacerlo, el resultado será la identidad:

$$x+y\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad x-y\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad x-(-y\sqrt{2})=x+y\sqrt{2}.$$

Ahora ya hemos descrito por completo el grupo de Galois de este cuerpo numérico: consiste en dos elementos, *I* y *S*, y las fórmulas que hemos visto arriba nos proporcionan sus composiciones.

[47] Pocos años antes, Niels Henrik Abel demostró que había una ecuación de grado 5 que no podía resolverse en radicales (con importantes contribuciones de Joseph-Louis Lagrange y Paolo Ruffini). Sin embargo, la prueba de Galois era más general y conceptual. Para más información acerca de los grupos de Galois y la abundante historia acerca de la resolución de ecuaciones polinómicas, véase Livio, Mario, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster, Nueva York, 2005. [Hay trad. cast.: *La ecuación jamás resuelta*, Ariel, Barcelona, 2013, trad. de Blanca Ribera de Madariaga.]

[48] De un modo más general, veamos la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes racionales a, b y c. Sus soluciones x_1 y x_2 nos las dan las fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si el discriminante b^2-$4ac$ no es el cuadrado de un número racional, estas soluciones no son números racionales. De aquí que si añadimos x_1 y x_2 a los números racionales, obtenemos un nuevo cuerpo numérico. El grupo de simetrías de este cuerpo numérico comprende también dos elementos: la identidad y el intercambio por simetría de ambas soluciones, x_1 y x_2. En otras palabras, esta simetría intercambia $\sqrt{b^2-4ac}$ y $-\sqrt{b^2-4ac}$.

Pero no necesitamos escribir fórmulas explícitas para las soluciones a fin de describir este grupo de Galois. De hecho, dado que el grado del polinomio es 2, sabemos que hay dos soluciones, de modo que señalémoslas como x_1 y x_2. Así pues, tenemos

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si operamos los paréntesis, hallamos que $x_1 + x_2 = -b/a$ de modo que $x_2 = -b/a - x_1$. Tenemos también que

$$(x_1)^2 = -\frac{c + bx_1}{a}$$

porque x_1 es una solución de la ecuación arriba mencionada. Por lo tanto, si el discriminante no es el cuadrado de un número racional, el cuerpo numérico obtenido al añadir x_1 y x_2 a los números racionales comprende todos los números de la forma $\alpha + \beta x_1$, en que α y β son dos números racionales. Bajo el intercambio por simetría de x_1 y x_2, el número $\alpha + \beta x_1$ va a

$$\alpha + \beta x_2 = \left(\alpha - \beta \frac{b}{a}\right) - \beta x_1$$

Esta simetría es compatible con las operaciones de suma, resta, etc., porque tanto x_1 como x_2 resuelven la misma ecuación con coeficientes racionales. Obtenemos que el grupo de Galois de este cuerpo numérico comprende la identidad y el intercambio por simetría entre x_1 y x_2. Recalco nuevamente que no empleamos ningún conocimiento acerca de cómo expresar x_1 y x_2 en términos de a, b, c.

[49] Para ilustrar este punto, veamos, por ejemplo, la ecuación $x^3 = 2$. Una de sus soluciones es la raíz cúbica de 2, $\sqrt[3]{2}$ Hay dos soluciones más, que son números complejos: $\sqrt[3]{2}\omega$ y $\sqrt[3]{2}\omega^2$

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

(véase el tratamiento en el capítulo 9 a los números complejos). El cuerpo numérico más pequeño que contenga esas soluciones debería contener también sus cuadrados: $\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2})^2$, $\sqrt[3]{4}\omega$ y $\sqrt[3]{4}\omega^2$, (sus cubos son iguales a 2) así como sus razones: ω y ω^2. De modo que parece que, para construir el cuerpo numérico, tenemos que añadir ocho números a los racionales. Sin embargo, tenemos una relación:

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

que nos permite expresar ω^2 en términos de 1 y ω:

$$\omega^2 = -1 - \omega.$$

Por lo tanto, también tenemos

$$\sqrt[3]{2}\omega^2 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\omega, \; \sqrt[3]{2}\omega^2 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\omega,$$

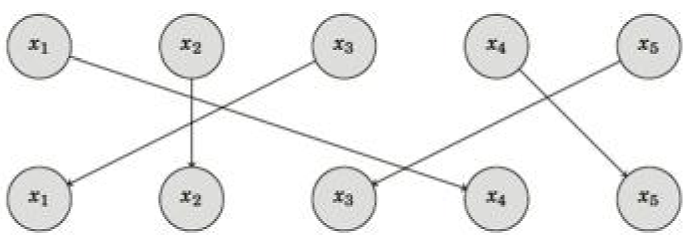
Por ello, para obtener nuestro cuerpo numérico, sólo necesitamos añadir cinco números a los racionales: ω, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\omega$, $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt[3]{4}\omega$. Por ello, un elemento general de este cuerpo numérico, llamado cuerpo de descomposición de la ecuación $x^3 = 2$, será una combinación de seis términos: un número racional más un número racional multiplicado por ω más un número racional multiplicado por $\sqrt[3]{2}$, etcétera. Compare esto con el cuerpo de descomposición de la ecuación $x^2 = 2$, cuyos elementos son dos términos: un número racional más un número racional multiplicado por $\sqrt{2}$.

Hemos visto arriba que los elementos del grupo de Galois del cuerpo de descomposición de la ecuación $x^2 = 2$ intercambian las dos soluciones de esta ecuación, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Hay dos de estas permutaciones: la que intercambia esas

dos soluciones y la identidad.
De igual modo, para cualquier otra ecuación con coeficientes racionales, definimos su cuerpo de descomposición como el cuerpo obtenido al añadir todas sus soluciones a los números racionales. Por la misma argumentación que la nota 4, arriba, toda simetría de este cuerpo numérico compatible con las operaciones de suma y multiplicación conserva los números racionales.
Por lo tanto, bajo una simetría de este tipo, toda solución de la ecuación ha de ir a otra solución. Es decir, obtenemos una permutación de estas soluciones. En el caso de la ecuación $x^3 = 2$, existen las tres soluciones mencionadas arriba. Bajo todas las permutaciones, la primera, $\sqrt[3]{2}$, va a cualquiera de las tres soluciones; la segunda, $\sqrt[3]{2}\omega$, va a cualquiera de las dos restantes, y la tercera, $\sqrt[3]{2}\omega^2$, ha de ir a la solución que queda (una permutación ha de ser de uno a uno para tener un inverso). Por lo tanto, hay 3·x 2 = 6 posibles permutaciones a estas tres soluciones. Estas permutaciones forman un grupo, y resulta que este grupo tiene una correspondencia uno a uno con el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de la ecuación $x^3 = 2$. Así pues, obtenemos una descripción explícita del grupo de Galois en términos de permutaciones de las soluciones.
En el cálculo de arriba empleamos fórmulas explícitas para las soluciones de la ecuación. Pero se puede efectuar una argumentación similar con una ecuación de tercer grado con coeficientes racionales, y no necesitamos una fórmula para sus soluciones en términos de los coeficientes. El resultado es el siguiente: llamemos x_1, x_2 y x_3 a las soluciones de la ecuación. Supongamos que todos ellos son irracionales. Sin embargo, es fácil ver que el discriminante de la ecuación, definido como

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2,$$

es siempre un número racional. Resulta que si su cuadrado no es un número racional, el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de esta ecuación es el grupo de permutaciones de estas soluciones (consiste, en tal caso, en seis elementos). Si la raíz cuadrada del discriminante es un número racional, entonces el grupo de Galois consiste en tres permutaciones: la identidad, la permutación cíclica x_1 ? x_2 ? x_3 ? x_1, y su inversa.
[50] Por ejemplo, no es difícil demostrar que para una ecuación típica de grado cinco (es decir, una con $n = 5$), para la que tenemos cinco soluciones, el grupo de Galois es el grupo de todas las permutaciones de esos cinco números. Una permutación es una nueva ordenación uno a uno de esos números, como muestra la ilustración de abajo.
Bajo tal permutación, la solución x_1 va a cualquiera de los cinco (posiblemente a sí misma), de modo que tiene cinco opciones; x_2 ha de ir a una de las cuatro soluciones restantes; x_3, a una de las tres que quedan, etcétera. Es decir, que sumándolas, hay 5·4·3·2·1 = 120 permutaciones, de modo que el grupo de Galois consiste en 120 elementos.



El grupo de permutaciones de un conjunto de n elementos, también llamado grupo simétrico sobre n letras, consiste en $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots 2\cdot 1$ elementos. A diferencia del grupo de Galois de ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado, no es un grupo resoluble. Por lo tanto, según la argumentación de Galois, no podemos expresar soluciones a la ecuación general de grado cinco en términos de radicales.
[51] Hoy en día está disponible en la página web del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton: publications.ias.edu
[52] Cita a partir de la imagen disponible en las Colecciones Digitales del Instituto de Estudios Avanzados, cdm.itg.ias.edu
[53] Langlands, Robert, «Is There Beauty in Mathematical Theories?», en Hössle, Vittorio (ed.), *The Many Faces of Beauty*, University of Notre Dame Press, Notre Dame (Indiana), 2013, disponible *online* en publications.ias.edu
[54] Para más información acerca de conjeturas, véase este clarificador artículo: Mazur, Barry, «Conjecture», *Synthèse*, vol. 111, 1997, pp. 197-210.
[55] Para más información acerca de la historia del último teorema de Fermat, véase Singh, Simon, *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*, Anchor Books, Nueva York, 1998. [Hay trad. cast.: *El enigma de Fermat*, Planeta, Barcelona, 2003, trad. de David Galadí y Jordi Gutiérrez.]
[56] Véase Wiles, Andrew, «Modular elliptic curves and Fermat's last theorem», *Annals of Mathematics*, vol. 141, 1995, pp. 443-551; y Taylor, R., y A. Wiles, «Ring-theoretic properties of certain Hecke Algebras», *Annals of Mathematics*, vol. 141, 1995, pp. 553-572. Wiles y Taylor demostraron la conjetura Shimura-Taniyama-Weil en el caso más típico (llamado semiestable), que resultó ser suficiente para demostrar el último teorema de Fermat. Unos años más tarde, los casos restantes acabaron siendo demostrados por C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond y R. Taylor.
Dado que ahora está probada, sería más apropiado hablar de la conjetura Shimura-Taniyama-Weil como un teorema. Y, de hecho, muchos matemáticos se refieren ahora a ella como «teorema de la modularidad». Pero a las viejas

costumbres les cuesta desaparecer, y algunos, como yo, aún empleamos su antiguo nombre. Irónicamente, al último teorema de Fermat siempre se le ha tratado de teorema, pese que era, en realidad, una conjetura. Sin duda, esto comenzó así por respeto a la afirmación de Fermat de que había hallado una demostración.

[57] Si N no es un número primo, podemos escribir $N = xy$ para dos números naturales x e y entre 1 y N -1. En tal caso, x no tiene inverso por multiplicación módulo N. Dicho de otra manera, no existe un número natural z entre 1 y N -1 tal que

$$xz = 1 \text{ módulo } N.$$

De hecho, si se satisficiera esta igualdad, multiplicaríamos ambos lados por y, y obtendríamos

$xyz = y$ módulo N.

Pero $xy = N$, de modo que el lado izquierdo es Nz, lo que significa que y es divisible por N. Pero en tal caso, y no puede estar entre 1 y N -1.

[58] La prueba atribuida a Euclides es la siguiente: aplicamos el método de «reducción al absurdo», que ya hemos empleado en este capítulo para describir la prueba del último teorema de Fermat.

Supongamos que hay un número de números primos finito: p_1, p_2..., p_N. Consideremos el número A obtenido al tomar su producto y sumarle 1; es decir, sea $A = p_1p_2... p_N +1$. Yo aseguro que se trata de un número primo. Lo probamos por reducción al absurdo: si no es un número primo, ha de ser divisible por un número natural que no sea 1 ni sí mismo. Es decir, que A ha de ser divisible por uno de los números primos: pongamos p_i. Por lo tanto, $A = 0$ módulo p_i, mientras que, según la definición de A, que $A = 1$ módulo p_i.

Hemos llegado a una contradicción. Esto significa que A no es divisible por ningún número natural excepto1yélmismo. Por lo tanto, A es un número primo.

Pero dado que A es claramente mayor que cualquiera de los números p_1, p_2..., p_N, esto contradice nuestra aseveración de que p_1, p_2..., p_N eran los únicos números primos. Por lo tanto, nuestra premisa inicial de que hay un número finito de números primos es falsa. Por lo tanto, hay infinitos números primos.

[59] Dejemos esto muy claro: dentro de un sistema numérico determinado, el inverso por multiplicación de un número a es un número b tal que $a \cdot b = 1$. De modo que, por ejemplo, dentro del sistema numérico de los números racionales, el inverso por multiplicación del número racional 3 4 es 4 3. Dentro del sistema numérico en que nos encontramos ahora, el inverso de un número natural a entre 1 y p -1 es otro número natural b del mismo tipo tal que

$$a \cdot b = 1 \text{ módulo } p.$$

No importa qué sistema numérico empleemos, el número cero, la identidad en la suma, nunca posee inverso por multiplicación. Por eso lo excluimos.

[60] Aquí está la demostración. Escojamos un número natural a entre 1 y p-1, en que p sea un número primo. Multipliquemos a por todos los demás números b de su tipo y tomemos el resultado módulo p. Compilaremos una tabla de dos columnas: en la primera columna irá el número b, y en la segunda columna irá $a \cdot b$ módulo p.

Por ejemplo, si $p = 5$y$a = 2$, la tabla sería así:

1	2
2	4
3	1
4	3

Veremos de inmediato que los números 1, 2, 3 y 4 aparecen en la columna de la derecha exactamente una vez. Lo que ocurre cuando multiplicamos por 2 es que obtenemos el mismo conjunto de números pero permutados de cierta manera. Para ser exactos, el número 1 aparece en la tercera línea. Esto significa que cuando multiplicamos 3 por 2, obtenemos 1 módulo 5. En otras palabras, 3 es el inverso de 2 si hacemos la operación en una aritmética de módulo 5.

El fenómeno es general: si compilamos una tabla como la de arriba para cualquier número primo p y cualquier número a de la lista 1,2...,p - 1, todos los números de la lista 1,2...,p - 1 aparecerán en la columna de la derecha exactamente una vez.

Demostremos esto, empleando nuevamente el método de la reducción al absurdo. Digamos que esto no es así. En tal caso, uno de los números del conjunto 1, 2..., p - 1 debería aparecer en la columna de la derecha al menos dos veces. Esto significa que hay al menos dos números del conjunto 1,2...,p -1 llamémoslos, c_1 y c_2 (supongamos que c_1 c_2) tales que

$$a \cdot c_1 = a \cdot c_2 = n \text{ módulo } p.$$

Pero entonces tenemos que

$$a \cdot c_1 - a \cdot c_2 = a \cdot (c_1 - c_2) = 0 \text{ módulo } p.$$

Esta última fórmula significa que $a \cdot (c_1 - c_2)$ es divisible por p. Esto es imposible, porque p es número primo y tanto a como $c_1 - c_2$ son números del conjunto {1, 2..., p -1}.

Concluimos que en la columna derecha de nuestra tabla, cada uno de los números {1, 2..., p -1} aparece una sola vez. Pero precisamente porque hay p-1 de esos números y tenemos el mismo número de filas en nuestra tabla, p -1, la única posibilidad de que esto ocurra es que cada número aparezca exactamente una vez. Pero en tal caso, el número 1 ha de aparecer en algún lugar de la columna de la derecha y sólo una vez. Pero resulta que tenemos que

$$a \cdot b = 1 \text{ módulo } p$$

Con esto se completa la prueba.

[61] Por ejemplo, podemos dividir 4 entre 3 en el cuerpo finito de 5 elementos:

$$4/3 = 4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ módulo } 5$$

$$= 3 \text{ módulo } 5$$

(aquí empleamos el hecho de que 2 es el inverso por multiplicación de 3 módulo 5).

[62] Observemos que para todo número a cuyo valor absoluto sea menos que 1 tenemos

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots = \frac{1}{1-a},$$

lo que es fácil de demostrar multiplicando ambos lados por 1 - a. Mediante esa identidad, y señalando $(q + q^2)$ como a, podemos reescribir la función generadora de los números de Fibonacci

$$q(1 + (q + q^2) + (q + q^2)^2 + (q + q^2)^3 + \ldots)$$

como

$$\frac{q}{1-q-q^2}.$$

Acto seguido, si escribimos $1 - q - q^2$ como producto de factores lineales, hallamos que

$$\frac{q}{1-q-q^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}q\right)^{-1} - \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}q\right)^{-1}\right)$$

Empleando nuevamente la identidad de arriba, con

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}q$$

hallamos que el coeficiente de q^n en nuestra función generadora (que es F_n) es igual a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Por lo tanto, obtenemos una fórmula cerrada para el n-ésimo número de Fibonacci, que es independiente de los precedentes.

Nótese que el número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que aparece en esta fórmula, es la llamada proporción áurea. Se sigue de la fórmula de arriba que la proporción F_n/F_{n-1} tiende a la proporción áurea conforme n crece. Para más información acerca de la proporción áurea y los números de

Fibonacci, véase Livio, Mario, *The Golden Ratio*, Broadway Books, Nueva York, 2003. [Hay trad. cast.: *La proporción áurea*, Ariel, Barcelona, 2006, trad. de Daniel Aldea Rosell e Irene Musas Calpe.]

[63] Sigo aquí la presentación de este resultado ofrecida en Taylor, Robert, «Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human curiosity», *The Letter of the Institute for Advanced Study*, verano de 2012, pp. 6-8. Agradezco a Ken Ribet sus útiles comentarios. Según Weil, André, *Dirichlet Series and Automorphic Forms*, Springer-Verlag, Berlín/Nueva York, 1971, la ecuación de tercer grado que tratamos en este capítulo la presentó John Tate, profundizando en el trabajo de Robert Fricke.

[64] Este grupo es uno de los llamados «subgrupos de congruencia» del grupo denominado $SL_2(Z)$, que consiste en matrices 2 × 2 con coeficientes enteros y con el determinante 1, es decir, la gama de enteros

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $ad - bc = 1$. La multiplicación de matrices está dada por la fórmula estándar:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Ahora bien, todo número complejo q dentro del disco unidad puede escribirse como $e^{2\pi\tau\sqrt{-1}}$ para un número complejo τ cuya parte imaginaria sea positiva: $\tau = x+y\sqrt{-1}$ donde $y > 0$ (véase nota 12 del capítulo 15). El número q está determinado de modo único por τ, y viceversa. Por lo tanto, podemos describir la acción del grupo $SL_2(Z)$ sobre q describiendo la acción correspondiente sobre τ. Esta última nos la proporciona la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

El grupo $SL_2(Z)$ (más concretamente, su cociente por el subgrupo de dos elementos que consiste en la matriz identidad I y la matriz $-I$) es el grupo de simetrías del disco dotado de una métrica no euclidiana particular, llamado modelo del disco de Poincaré. Nuestra función es una forma modular de «peso 2», lo que significa que es invariante bajo la acción arriba descrita de un subgrupo de congruencia $SL_2(Z)$ sobre el disco, si corregimos esta acción multiplicando la función por el factor $(c\tau+ d)^2$.

Véase, por ejemplo, Darmon, Henri, «A proof of the full Shimura-Taniyama-Weil conjecture is announced», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, diciembre de 1999, pp. 1397-1401. Disponible *online* en www.ams.org

[65] Esta imagen es creación de Lars Madsen y se publica con su permiso. Agradezco a Ian Agol por señalármela y por un útil debate.

[66] Véase, por ejemplo, Koblitz, Neal, «Elliptic curve cryptosystems», *Mathematics of Computation*, vol. 49, 1987, pp. 203-209. Y Blake, I., Seroussi, G. y N. Smart, *Elliptic Curves in Cryptography*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[67] En general, esto es cierto para todos salvo un número finito de primos p. Hay un par de invariantes adicionales, unidas a la ecuación cúbica (el llamado «conductor») y a la forma modular (el llamado «nivel») y estas invariantes también se conservan bajo esta correspondencia. Por ejemplo, en el caso de la ecuación cúbica que hemos visto, ambas son igual a 11. Señalaré también que todas las formas modulares que aparecen aquí poseen término constante cero; el coeficiente b_1 de q es igual a 1 y todos los demás coeficientes b_n con $n > 1$ están determinados por los b_p correspondientes a los números primos p.

[68] Básicamente, si a, b, c resuelven la ecuación de Fermat $a^n + b^n = c^n$, en que n es un número primo impar, consideremos, siguiendo la obra de Yves Hellegouarch y Gerhard Frey, la ecuación cúbica

$$y^2 = x(x- a^n)(x+ b^n).$$

Ken Ribet demostró (siguiendo una sugerencia de Frey y ciertos resultados parciales obtenidos por Jean-Pierre Serre) que esta ecuación no puede satisfacer la conjetura Shimura-Taniyama-Weil. Junto al caso $n = 4$ (que el propio Fermat probó) esto implica el último teorema de Fermat. De hecho, todo entero $n > 2$ se puede escribir como un producto $n = mk$, en que m es o bien 4 o bien un número primo impar. Por lo tanto, la ausencia de soluciones a la ecuación de Fermat para tal m implica su ausencia para todo $n > 2$.

[69] Shimura, Goro, «Yutaka Taniyama and his time. Very personal recollections», *Bulletin of London Mathematical Society*, vol. 21, 1989, p. 193.

[70] *Ibid.*, p. 190.

[71] Acerca de la rica historia de la conjetura, véase nota a pie de página, pp. 1302-1303 en el siguiente artículo: Lang, Serge, «Some History of the Shimura-Taniyama conjecture», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 42, 1995, pp. 1301-1307. Disponible *online* en www.ams.org.

[72] *The Economist*, 20 de agosto de 1998, p. 70.

[73] Las imágenes de superficies de Riemann empleadas en este libro se han creado con *software Mathematica®*, empleando el código generosamente proporcionado por Stan Wagon. Para más detalles, véase su libro Wagon, Stan, *Mathematica® in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*, Springer-Verlag, Berlín/Nueva York, 2010.

[74] Esta no es una definición precisa, pero proporciona la intuición correcta acerca de los números reales. Para una definición precisa, deberíamos pensar en cada uno de los números reales como en el límite de una sucesión convergente de números racionales (también llamada sucesión de Cauchy); por ejemplo: los truncamientos de la parte decimal infinita de $\sqrt{2}$ arrojarían una sucesión tal.

[75] A fin de hacerlo, marque un punto en la circunferencia y coloque el círculo en la recta, de modo que el punto marcado en la circunferencia toque el punto 0 de la recta. Luego, haga rodar la circunferencia a la derecha hasta que el punto marcado vuelva a tocar la recta (lo que ocurrirá tras una vuelta completa de la circunferencia). Este punto de contacto entre la circunferencia y la recta será el punto correspondiente a π.

[76] La geometría de los números complejos (y de los demás sistemas numéricos) se encuentra magníficamente explicada en Mazur, Barry, *Imagining Numbers*, Picador, Nueva York, 2004. [Hay trad. cast.: *Números imaginados* (*en especial la raíz cuadrada de* -15), Fondo de Cultura Económica, Buenos Aires/México, DF, 2008, trad. de Juan Pablo Pinasco.]

[77] Para ser más exactos, obtenemos la superficie del donut menos un punto. Este punto extra corresponde a la «solución infinita», cuando x e y tienden a infinito.

[78] Para conseguir una superficie de Riemann de género g, debemos poner un polinomio en x de grado $2g+1$ en el lado derecho de la ecuación.

[79] Este vínculo entre álgebra y geometría fue un profundo descubrimiento de René Descartes, descrito por primera vez en *La Géometrie*, un apéndice a su obra *El discurso del método*, publicado en 1637. Esto es lo que E. T. Bell escribió acerca del método de Descartes: «Pero, ahora, llegamos al verdadero poder de su método. Partimos de ecuaciones de cualquier grado deseado o sugerido de complejidad e interpretamos sus propiedades algebraicas y analíticas geométricamente… El álgebra y el análisis serán nuestros pilotos en los mares desconocidos del “espacio” y su “geometría”» [Todo el libro está disponible *online* en castellano en www.librosmaravillosos.com, de donde he sacado la traducción. Ignoro si es de Patricio Barros, como parecería sugerir la página, o si emplea la traducción de Jiménez de Asúa. (*N. del t.*).] (Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Touchstone Books, Nueva York, 1986, p. 54). [Existen varias versiones en castellano. La más conocida quizá sea *Los grandes matemáticos: desde Zenón a Poincaré, su vida y sus obras*, Losada, Buenos Aires, 1948, trad. de Felipe Jiménez de Asúa.] Nótese, sin embargo, que el método de Descartes se aplica a soluciones de ecuaciones con números reales, mientras que en este capítulo nos interesan las soluciones en cuerpos finitos y en números complejos.

[80] Por poner un ejemplo, aprendimos en el capítulo 8 que la ecuación cúbica $y^2 + y = x^3 - x^2$ posee cuatro soluciones módulo 5, de modo que, ingenuamente, se puede pensar que la curva correspondiente sobre el cuerpo finito de 5 elementos tiene cuatro puntos.

Pero en realidad hay mucha más estructura porque también podemos considerar soluciones con valores en varias extensiones del cuerpo finito de 5 elementos; por ejemplo, el obtenido al añadir la soluciones de la ecuación $x^2 = 2$, que aludimos en la nota 8 del capítulo 14. Estos cuerpos extendidos poseen 5^n elementos para $n = 2,3,4\ldots$ y así obtenemos una jerarquía de soluciones con valores en estos cuerpos finitos.

Las curvas correspondientes a las ecuaciones cúbicas se denominan «curvas elípticas».

[81] *The Bhagavad-Gita, Krishna's Counsel in Time of War*, trad. por Barbara Stoler Miller, Bantam Classic, 1986. [La Wikipedia emplea para la bibliografía el *Bhagavad-Gita*, trad. de Consuelo Martín Diza, Ed. Trotta, Madrid, 1997[6]. Existe una versión íntegra traducida al español en www.bhagavad-gita.org/index-spanish.html]

Es interesante señalar que Weil pasó dos años en la India a principios de la década de 1930 y, según él mismo admitió, se vio influido por la religión hindú.

[82] Véase, por ejemplo, Sheth, Noel, «Hindu Avatara and Christian Incarnation: A comparison», *Philosophy East and West*, vol. 52, n.º 1, pp. 98-125.

[83] Weil, André, *Collected Papers*, vol. I, Springer-Verlag, Berlín/Nueva York, 1979, p. 251 (trad. del autor).

[84] *Ibid.* p. 253. La idea es que dada una curva sobre un cuerpo finito, consideramos las llamadas funciones racionales sobre ella. Estas funciones son proporciones entre dos polinomios. Nótese que una función tal tiene un «polo» (es decir, su valor está sin definir) en todos los puntos de la curva en los que el polinomio que aparece en el divisor es 0. Resulta que el conjunto de todas las funciones racionales en una curva determinada es análogo, en sus propiedades, al conjunto de números racionales, o a un cuerpo numérico más general, como los que tratamos en el capítulo 8.

Para explicar esto con más exactitud, veamos las funciones racionales sobre superficies de Riemann: la analogía seguirá siendo válida. Veamos, por ejemplo, la esfera. Empleando la proyección estereográfica, podemos ver la esfera como la unión de un punto y un plano complejo (podemos ver el punto extra como uno que representa el infinito). Señalemos como $t = r + s\sqrt{-1}$ la coordenada en el plano complejo. Luego todo polinomio $P(t)$ con coeficientes complejos es una función sobre el plano. Estos polinomios son análogos a los enteros que aparecen en teoría de números. Una función racional sobre la esfera es una razón entre dos polinomios $P(t)/Q(t)$ sin factores comunes. Estas funciones racionales son los análogos de los números racionales, que son razones m/n de enteros sin factores comunes. De modo similar, las funciones racionales sobre superficies de Riemann más generales son análogas a elementos de un cuerpo numérico más general.

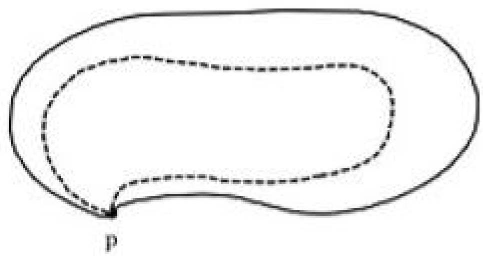
El poder de esta analogía reside en que para muchos resultados acerca de cuerpos numéricos habrá resultados

similares válidos para las funciones racionales de curvas sobre cuerpos finitos, y viceversa. A veces es más fácil detectar o demostrar una afirmación determinada para uno de ellos. En ese caso la analogía nos dice que una afirmación similar ha de ser verdad para el otro. Este ha sido uno de los vehículos empleados por Weil y otros matemáticos a fin de obtener nuevos resultados.

[85] *Ibid.*, p. 253. Empleo aquí la traducción de Martin H. Krieger en *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 52, 2005, p. 340.

[86] Había tres conjeturas de Weil, que fueron demostradas por Bernard Dwork, Alexander Grothendieck y Pierre Deligne.

[87] Hay redundancia en esta definición. Para explicarlo, imaginemos dos caminos en el plano como los de la imagen de abajo, uno liso y el otro de puntos. Está claro que podemos deformar de manera continua uno de ellos hasta que sea el otro sin que se rompa. Es razonable y económico declarar que dos caminos cerrados que pueden deformarse hasta ser cada uno el otro son, de esta manera, iguales. Si hacemos esto, reducimos drásticamente el número de elementos en nuestro grupo. Esta regla es, de hecho, similar a la que empleamos en la definición de los grupos de trenzas del capítulo 5. También allí declaramos iguales dos trenzas que podían deformarse («retorcerse») hasta ser como la otra sin entrecruzar las hebras.

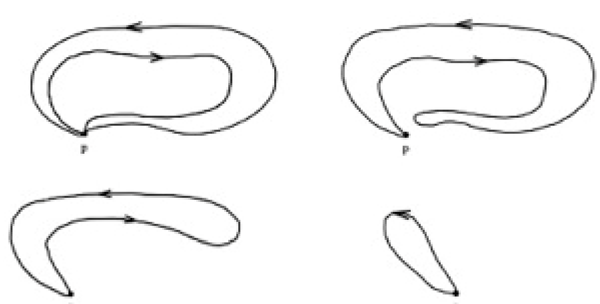


De modo que definimos el grupo fundamental de nuestra superficie de Riemann como el grupo cuyos elementos son caminos cerrados que comienzan y acaban en el punto P, con el requerimiento adicional de que identifiquemos los caminos que pueden deformarse de modo continuo hasta ser el otro.

Nótese que si nuestra superficie de Riemann está conectada, algo que suponemos tácitamente en todo momento, la elección del punto de referencia P deja de ser importante: los grupos fundamentales asignados a diferentes puntos de referencia P tendrán una correspondencia uno a uno entre sí (para ser precisos, serán «isomorfos» entre sí).

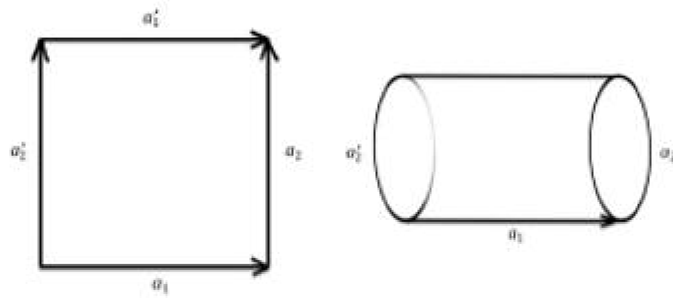
[88] El elemento identidad será el «camino constante». Nunca abandona el punto marcado P. De hecho es instructivo pensar en cada camino cerrado como en la trayectoria de una partícula, que comienza y acaba en el mismo punto P. El camino constante es la trayectoria de la partícula que tan sólo se limita a quedarse en el punto P. Está claro que si sumamos cualquier camino al camino constante, en el sentido descrito en el texto, obtendremos el camino original.

El camino inverso a un camino dado será el mismo camino pero recorrido en dirección opuesta. Para comprobar que este es, en efecto, el inverso, sumemos un camino y su inverso. Obtendremos un nuevo camino que recorre dos veces su ruta, pero en dos direcciones opuestas. Podemos deformar continuamente este «doble» camino hasta el camino constante. Primero retorcemos levemente uno de los dos caminos. El camino resultante puede alargarse hasta un punto, como muestran las imágenes abajo.

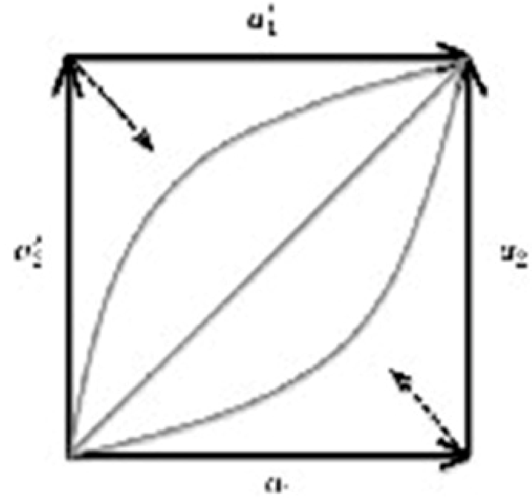


[89] Como vimos en la nota 10 del capítulo 5, el grupo de trenzas B_n puede interpretarse también como el grupo fundamental del espacio de polinomios mónicos de grado n con n raíces distintas. Escogemos como punto de referencia P, el polinomio $(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ con las raíces $1,2,\dots,n$ (estas son los «clavos» de las trenzas).

[90] Para ver que los dos caminos conmutan entre sí, veamos que el toro puede obtenerse si pegamos los lados opuestos de un cuadrado (un polígono con 4 vértices). Cuando pegamos dos lados horizontales, a_1 y a'_1, obtenemos un cilindro. Si pegamos los círculos de los extremos opuestos del cilindro (que es en lo que se convierten los dos lados verticales del cuadrado, a_2 y a'_2, cuando pegamos los dos horizontales) obtenemos un toro. Vemos ahora que los lados a_1 y a_2 se convierten en dos caminos cerrados independientes en el toro. Nótese que en el toro, las cuatro esquinas representan un mismo punto, de modo que estos caminos quedan cerrados: comienzan y acaban en el mismo punto P del toro. Y también que $a_1 = a'_1$ porque los hemos pegado, y de igual modo a_2 y a'_2.



En el cuadrado, si tomamos el camino a_1 y luego tomamos el camino a_2, nos llevarán de una esquina a su opuesta. El camino resultante es $a_1 + a_2$. Pero podemos también ir de una esquina a otra por un camino diferente: primero tomamos a'_2 y luego a'_1, que es lo mismo que a_1. El camino resultante es $a'_2 + a'_1$. Tras pegar los lados opuestos del cuadrado, a'_1 se convierte en a_1 y a'_2 se convierte en a_2. De modo que $a'_2 + a'_1 = a_2 + a_1$. Observemos ahora que tanto $a_1 + a_2$ como $a_2 + a_1$ se pueden deformar hacia el camino diagonal, una línea recta que conecta las dos esquinas opuestas, como se ve en la imagen inferior (las flechas discontinuas muestran cómo deformar cada uno de los caminos).



Esto significa que los caminos $a_1 + a_2$ y $a_2 + a_1$ dan lugar al mismo elemento en el grupo fundamental del toro. Hemos demostrado que

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1.$$

Esto implica que el grupo fundamental del toro tiene una estructura sencilla: podemos expresar sus elementos como $M \cdot a_1 + N \cdot a_2$, donde a_1 y a_2 son dos circunferencias en el toro (mostrados en la p. 157 del texto), y M y N son enteros. La suma en el grupo fundamental coincide con la suma habitual de estas expresiones.

[91] El modo más fácil de describir el grupo fundamental de la superficie de Riemann de un género g positivo (es decir, con g agujeros) es nuevamente imaginar que pegamos los lados opuestos de un polígono, pero ahora con $4g$ vértices. Por ejemplo, peguemos los lados opuestos de un octógono, el polígono con ocho vértices. Existen cuatro pares de lados opuestos en este caso, y hemos de identificar cada par. El resultado de esta unión es más difícil de imaginar que el caso del toro, pero sabemos que obtendremos una superficie de Riemann de género 2 (la superficie de un *pretzel* danés). Esto se puede emplear para describir el grupo fundamental de una superficie de Riemann de modo similar a como describimos el grupo fundamental de un toro. Como en el caso del toro, construimos $2g$ elementos en el grupo fundamental de la superficie de Riemann de género g, tomando los caminos a lo largo de $2g$ lados consecutivos del polígono (cada uno de los $2g$ lados restantes se identificará con uno de estos). Señalémoslos como $a_1, a_2\ldots, a_{2g}$. Ellos generarán el grupo fundamental de nuestra superficie de Riemann, en el sentido de que todo elemento de este grupo se puede obtener sumando estos, posiblemente varias veces. Por ejemplo, para $g = 2$ tenemos el siguiente elemento: $a_3+2a_1+3a_2+a_3$. (Pero nótese que no podemos reescribirlo como $2a_3 +2a_1 +3a_2$, porque a_3 no conmuta con a_2 y a_1, de modo que no podemos mover el a_3 de más a la derecha a la izquierda).
Como en el caso del toro, en que al expresar el camino que conecta dos esquinas opuestas de nuestro polígono de dos maneras diferentes, obtenemos una relación entre ellas, generalizando la relación de conmutatividad en el caso del

toro:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{2g-1} + a_{2g} = a_{2g} + a_{2g-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Esta resulta ser la única relación entre estos elementos, de modo que obtenemos una concisa descripción del grupo fundamental: está generado por a_1, a_2..., a_{2g}, sujeto a esta relación.

[92] Para explicar esto con más precisión, consideremos todas las funciones racionales en una superficie de Riemann, en el sentido de la nota 13. Constituyen análogos de los números racionales. El grupo de Galois relevante se define como el grupo de simetrías de un cuerpo numérico obtenido al añadir soluciones de ecuaciones polinómicas como x^2+2 a los números racionales. Igualmente, podemos añadir soluciones de ecuaciones polinómicas a funciones racionales sobre una superficie de Riemann *X*. Resulta que cuando hacemos esto, obtenemos funciones racionales sobre otra superficie de Riemann *X'*, que es un «recubrimiento» de *X*; es decir, que tenemos una aplicación *X' ? X* con fibras finitas. En esta situación, el grupo de Galois consiste en aquellas simetrías de *X'* que conserven sin cambios todos los puntos de *X*. Dicho de otra manera, estas simetrías actúan a lo largo de la aplicación *X' ? X*.

Observemos ahora que si tenemos un camino cerrado sobre la superficie de Riemann *X*, que comienza y acaba en un punto *P* de *X*, podemos tomar todos los puntos de *X'* en la fibra sobre *P* y «seguirlo» a lo largo de su camino. Cuando regresamos, en general obtenemos un punto diferente en la fibra sobre *P*, de modo que obtenemos una transformación en esta fibra. Este es el fenómeno de la monodromía, del que hablaremos con más detalles en el capítulo 15. La transformación de la fibra se puede remontar a un elemento del grupo de Galois. Así, obtenemos un vínculo entre el grupo fundamental y el grupo de Galois.

[93] La palabra «especial» se refiere a esas transformaciones ortogonales que conservan la orientación (estas son, precisamente, las rotaciones de la esfera). Un ejemplo de transformación ortogonal que no conserva la orientación, y que por lo tanto no pertenece a SO(3) es un reflejo con respecto a uno de los planos de coordenadas. El grupo SO(3) está íntimamente relacionado con el grupo SU(3), que vimos en el capítulo 2 en relación con los quarks (el grupo especial unitario del espacio tridimensional). El grupo SU(3) se define de modo análogo a SO(3); sustituimos el espacio tridimensional *real* por el espacio tridimensional *complejo*.

[94] Aunque otra manera de ver que la circunferencia es unidimensional sería recordar que se puede pensar en ella como en el conjunto de soluciones reales de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, como vimos en el capítulo 9. De modo que la circunferencia es el conjunto de puntos en el plano sujetos por una ecuación. De aquí que su dimensión es la dimensión del plano (dos) menos el número de ecuaciones (uno).

[95] Esta cita aparece en el libro de anotaciones de Duchamp titulado *À l'Infinitif*, citado en Holton, Gerald, «Henri Poincaré, Marcel Duchamp and innovation in science and art», *Leonardo*, vol. 34, 2001, p. 130.

[96] Dalrymple Henderson, Linda, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, MIT Press, Boston, 2013, p. 493.

[97] Holton, Gerald, *Ibid.*, p. 134.

[98] Darwin, Charles, *Autobiographies*, Penguin Classics, Londres, 2002, p. 30. [Hay trad. cast.: *Autobiografías*, Losada, Buenos Aires, 2009, trad. de Nora Dottori.]

[99] Para más detalles véase, por ejemplo, Yau, Shing-Tung y Streve Nadis, *The Shape of Inner Space*, Basic Books, Nueva York, 2010.

[100] Resulta que la dimensión de este grupo es igual a $n(n - 1)/2$. Dicho de otra manera, para describir un elemento de este grupo necesitamos $n(n-1)/2$ coordenadas independientes (en caso de que $n = 3$, necesitaríamos $3(3-1)/2 = 3$ coordenadas, como hemos visto en el texto principal).

[101] Matemáticamente, todo lazo puede verse como la imagen de una «aplicación» particular de la circunferencia al espacio tridimensional, es decir, una regla que asigne a cada punto φ de la circunferencia un punto $f(\varphi)$ en el espacio tridimensional. Sólo tenemos en cuenta aplicaciones «lisas». Hablando *grosso modo*, esto significa que el lazo carece de esquinas o ángulos agudos, de tal modo que se parece al que se muestra en la imagen del texto principal. Con más generalidad, una «aplicación» de una variedad *S* en una variedad *M* es una regla que asigna a cada punto *s* de *S* un punto en *M*, llamado la imagen de *s*.

[102] Véase, por ejemplo, Greene, Brian, *The Elegant Universe*, Vintage Books, Nueva York, 2003. [Hay trad. cast.: *El universo elegante: supercuerdas, dimensiones ocultas y la búsqueda de una teoría final*, Booket, Barcelona, 2012, trad. de Mercedes García Garmilla.]

[103] Para ser más exactos, un lazo en SO(3) es una agrupación $\{f(\varphi)\}$ de elementos de SO(3), parametrizados por el ángulo φ, que es una coordenada de la circunferencia. Dado un segundo lazo, que es una agrupación $\{g(\varphi)\}$, compongamos las dos rotaciones, $f(\varphi) \circ g(\varphi)$ para cada φ. Lo que obtenemos es una nueva agrupación $\{f(\varphi) \circ g(\varphi)\}$ que es otro lazo en SO(3). De esta manera, por cada par de lazos de SO(3) producimos un tercer lazo. Esta es la regla de multiplicación en el grupo de lazos. El elemento identidad del grupo de lazos es el lazo concentrado en la identidad de SO(3), es decir, $f(\varphi)$ es el elemento identidad de SO(3) para todo φ. El lazo inverso del lazo $\{f(\varphi)\}$ es el lazo $\{f(\varphi)^{-1}\}$. Es fácil comprobar que todos los axiomas del grupo se sostienen. Por lo tanto, el espacio de lazo de SO(3) es, en efecto, un grupo.

[104] Para verlo, consideremos un ejemplo más sencillo: el espacio lazo del plano. El plano tiene dos coordenadas, *x* e *y*. Por lo tanto, un lazo en el plano es una agrupación de puntos en el plano con coordenadas $x(\varphi)$ e $y(\varphi)$, uno para cada ángulo φ entre 0 y 360 grados. (Por ejemplo, las fórmulas $x(\varphi) = \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = \text{sen}(\varphi)$ describen un lazo en particular: la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Por ello, para especificar un lazo tal debemos especificar una agrupación de infinitos pares de números $(x(\varphi), y(\varphi))$, un par por cada ángulo φ. Esa es la razón por la que el

espacio lazo, en el plano, es infinito-dimensional. Por la misma razón, el espacio lazo de toda variedad finito-dimensional es también infinito-dimensional).

[105] Citado en Langer, R. E., «René Descartes», *The American Mathematical Monthly*, vol. 44, n.º 8, octubre de 1937, p. 508.

[106] El plano tangente es el plano más cercano a la esfera de todos los planos que pasan a través de este punto. Sólo toca la esfera en este punto, mientras que si movemos el plano incluso muy ligeramente (de modo que aún pase por el mismo punto fijo de la esfera) obtendremos un plano que interseccione la esfera en más puntos.

[107] Por definición, el álgebra de Lie de un grupo de Lie dado es el espacio plano (como una recta, un plano, etcétera) más cercano a este grupo de Lie de entre los demás espacios de Lie que pasan por el punto en el grupo de Lie correspondiente a la identidad.

[108] Un círculo general no posee un punto especial. Pero el *grupo circular* sí lo posee: es el elemento identidad de este grupo, que es un punto especial del círculo. Ha de estar especificado para convertir un círculo en un grupo.

[109] He aquí una definición más precisa de espacio vectorial: Una vez escogemos un sistema de coordenadas en un espacio plano n-dimensional, identificamos los puntos de este espacio con n-tuplas de números reales $(x_1,x_2...,x_n)$ con los números x_i representando las coordenadas de un punto. En particular existe un punto especial (0,0...,0) en el que todas las coordenadas son iguales a 0. Este es el origen.

Ahora fijemos un punto $(x_1,x_2...,x_n)$ en este espacio. Definimos una simetría de nuestro espacio, que envía cualquier otro punto $(z_1, z_2...,z_n)$ a $(z_1 + x_1, z_2 + x_2...,z_n + x_n)$. Geométricamente, podemos pensar en la simetría como el cambio de nuestro espacio n-dimensional en la dirección del intervalo apuntado que conecta el origen y el punto $(x_1, x_2..., x_n)$. A esta simetría se le denomina *vector*, y se suele representar por este intervalo apuntado. Señalemos este vector como $\langle x_1,x_2..., x_n \rangle$. Existe una correspondencia uno a uno entre puntos del espacio plano n-dimensional y los vectores. Por esta razón, el espacio plano con un sistema de coordenadas fijado puede verse como un espacio de vectores. De aquí que lo llamemos *espacio vectorial*.

La ventaja de pensar en términos de vectores más que en puntos es que en vectores tenemos dos operaciones naturales. La primera es la operación de suma de vectores, que convierte un espacio vectorial en un grupo. Como se explicaba en el capítulo 2, las simetrías se pueden componer, y por tanto formar un grupo. La composición de las simetrías de movimiento descritas en el párrafo previo nos da la regla que seguir en la suma de vectores:

$$\langle x_1, x_2, ...x_n\rangle + \langle y_1, y_2, ...y_n\rangle = \langle y_1 + x_1, y_2 + x_2,...y_n + x_n\rangle$$

El elemento identidad en el grupo de vectores es el vector $\langle 0, 0, ...,0\rangle$. El inverso por la suma del vector $\langle x_1, x_2..., x_n\rangle$ es el vector $\langle -x_1,-x_2..., -x_n\rangle$.

La segunda es la operación de multiplicación de vectores por números reales. El resultado de la multiplicación de un vector $\langle x_1, x_2...,x_n\rangle$ por un número real k es el vector $\langle kx_1, kx_2..., kx_n\rangle$.

Así pues, un espacio vectorial tiene dos estructuras: suma, satisfaciendo las propiedades de grupo, y multiplicación por números. Estas estructuras han de satisfacer propiedades naturales.

Ahora bien, todo espacio tangente es un espacio vectorial y, por tanto, toda álgebra de Lie es un espacio vectorial.

Lo arriba descrito es la noción de espacio vectorial sobre números reales. En efecto, las coordenadas de los vectores son números reales, de modo que podemos multiplicar vectores por números reales. Si sustituimos los números reales por números complejos en esta descripción, obtendremos la noción de espacio vectorial sobre números complejos.

[110] La operación sobre una álgebra de Lie se suele señalar con corchetes, así que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ señalan dos vectores en una álgebra de Lie (que es un espacio vectorial, como explicamos en la nota anterior), el resultado de esta operación se señala como $[\vec{a}, \vec{b}]$. Satisface las siguientes propiedades: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}]+[\vec{b}, \vec{c}]$, $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$ para cualquier número k, así como la llamada identidad Jacobi:

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}],\vec{b}] = 0$$

[111] El producto vectorial de dos vectores en el espacio tridimensional, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es el vector, señalado como $\vec{a} \times \vec{b}$, que es perpendicular al plano que contiene $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tiene una longitud igual al producto de las longitudes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y el seno del ángulo entre ellos, y tal que el triple de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y $\vec{a} \times \vec{b}$ tenga orientación positiva (esto puede expresarse mediante la llamada regla de la mano derecha).

[112] Por ejemplo, el álgebra de Lie del grupo de Lie SO(3) es el espacio vectorial tridimensional. Por lo tanto, el álgebra de Lie consiste en todos los lazos de este espacio tridimensional. El producto vectorial en el espacio tridimensional proporciona a una álgebra de Lie estructura sobre estos lazos. Así, dados dos lazos, producimos un tercero, pese a que no es fácil describir qué es en palabras.

[113] Para ser más exactos, una álgebra Kac-Moody es una extensión del álgebra de Lie de un grupo de lazos por un espacio unidimensional. Para más detalles, véase Kac, Victor, *Infinite-dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990[3].

[114] Los modelos con simetría de álgebras Virasoro se denominan teorías conformes de campos. Los presentaron por primera vez los físicos rusos Alexander Belavin, Alexander Polyakov y Alexander Zamolodchikov, en 1984. Su innovador trabajo se apoyaba en los resultados obtenidos por Feigin y Fuchs, así como por Victor Kac.

[115] Los más conocidos de estos son los modelos Weiss-Zumino-Witten. Para más detalles véase Frenkel, Edward, y David Ben-Zvi, *Vertex Algebras*, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 2004.

[116] He aquí una construcción precisa: supongamos que tenemos un elemento del grupo de lazos de SO(3), que es una agrupación $\{g(\varphi)\}$ de elementos de SO(3) parametrizados por el ángulo φ (la coordenada en el círculo). Por otra parte, un elemento del espacio lazo de la esfera es la agrupación $\{f(\varphi)\}$ de puntos de la esfera parametrizados por φ. Dados tales $\{g(\varphi)\}$ y $\{f(\varphi)\}$, construimos otro elemento del espacio lazo de la esfera como la colección $\{g(\varphi)(f(\varphi))\}$. Esto supone que aplicamos la rotación $g(\varphi)$ al punto $f(\varphi)$ de la esfera, independientemente para cada φ. Por lo tanto, vemos que todo elemento del grupo de lazos de SO(3) da lugar a una simetría del espacio lazo de la esfera.
[117] Un punto de una variedad bandera es una agrupación: una recta en un espacio n-dimensional fijo, un plano que contiene esta recta, el espacio tridimensional que contiene el plano, etcétera, hasta llegar a un hiperplano (n-1)-dimensional que los contiene a todos.
Comparemos esto con los espacios proyectivos que yo había estudiado al principio: un punto del espacio proyectivo es sólo una recta en el espacio n-dimensional, nada más.
En el caso más sencillo, $n = 2$, nuestro espacio fijado es bidimensional, así que la única opción que tenemos es la de una recta (sólo hay un plano, el propio espacio). Por lo tanto, en este caso la variedad bandera es igual al espacio proyectivo, y resulta que coincide con la esfera. Es importante subrayar aquí que consideramos rectas, planos, etcétera, en un espacio complejo (no en un espacio real) y tan sólo las que pasan a través del origen de nuestro espacio n-dimensional fijado.
El siguiente ejemplo es $n = 3$, de modo que tenemos un espacio tridimensional. En este caso el espacio proyectivo consiste en todas las rectas de este espacio tridimensional, pero la variedad bandera consiste en pares: una recta y un plano que la contiene (sólo hay un espacio tridimensional). Por lo tanto, en este caso hay una diferencia entre el espacio proyectivo y la variedad bandera. Podemos pensar en la recta como en el mástil de una bandera y el plano como la bandera en sí. De aquí el nombre «variedad bandera».
[118] Feigin, Boris, y Edward Frenkel, «A family of representations of affine Lie algebras», *Russian Mathematical Surveys*, vol. 43, n.º 5, pp. 221-222.
[119] Saul, Mark, «Kerosinka: An Episode in the History of Soviet Mathematics», *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 46, noviembre de 1999, pp. 1217-1220.
[120] Más tarde me enteré de que Gelfand, que colaboraba con cardiólogos por razones similares a las de Yakov Isaévich con urólogos, empleó también con éxito este enfoque para la investigación médica.
[121] Una definición precisa de espacio vectorial se ofrece en la nota 17 del capítulo 10.
[122] En el caso de la categoría de espacios vectoriales, los morfismos de un espacio vectorial V_1 a un espacio vectorial V_2 son las llamadas transformaciones lineales de V_1 a V_2. Se trata de aplicaciones f de V_1 a V_2 tales que $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ para cualesquiera dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en V_1, y $f(k\cdot\vec{a}) = kf(\vec{b})$ para cualquier vector $\vec{a}$ en V_1 y número k. En particular, los morfismos de un espacio vectorial dado V a sí mismo son las transformaciones lineales de V a sí mismo. El grupo de simetría de V consiste en aquellos morfismos que posen un inverso.
[123] Véase, por ejemplo, Pierce, Benjamin C., *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1991, y Goguen, Joseph, «A categorical manifesto», *Mathematical Structures in Computer Sciences*, vol. 1, 1991, pp. 49-67. Awodey, Steve, *Category Theory*, Oxford University Press, 2010.
[124] Véase, por ejemplo, www.haskell.org y las referencias en el propio artículo.
[125] Véase, por ejemplo, Kahiwara, Masaki, y Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, Berlín/Nueva York, 2010.
[126] Esta sorprendente propiedad de aritmética en módulos de números primos tiene una explicación sencilla si se mira desde el punto de vista de teoría de grupos. Observemos los elementos no-cero del cuerpo finito: 1,2..., p -1. Forman un grupo con respecto a la multiplicación. De hecho, el elemento identidad con respecto a la multiplicación es el elemento 1: si multiplicamos cualquier elemento a por 1, obtenemos nuevamente a. Y todo elemento tiene un inverso, como se explica en la nota 8 del capítulo 8: para todo a en {1,2...,p -1} hay un elemento b tal que $a\cdot b = 1$ módulo p. Este grupo posee p -1 elementos. Existe un hecho general que vale para todo grupo finito G con N elementos: la N-ésima potencia de todo elemento a de este grupo es igual al elemento identidad (que señalaremos como 1),

$$aN = 1.$$

Para demostrarlo, observemos los siguientes elementos del grupo G: 1, a, a^2... dado que el grupo G es finito, estos elementos no pueden ser todos distintos. Tiene que haber repeticiones. Digamos que k es el número natural más pequeño tal que a^k es igual a 1 o a^j para algún $j = 1...,k - 1$. Supongamos que este último es el caso. Señalemos como a^{-1} el inverso de a, de modo que $a \cdot a^{-1} = 1$, y tomemos su j-ésima potencia $(a^{-1})^j$. Multipliquemos por la derecha ambos lados de la ecuación $a^k = a^j$ con $(a^{-1})^j$. Cada vez que nos encontremos con $a\cdot a^{-1}$ sustituyámoslo por 1. Multiplicar por 1 no cambia el resultado, así que siempre podemos sacar el 1 del producto. Entonces vemos que cada a^{-1} suprimirá una de las *aes*. De aquí que el lado izquierdo será igual a a^{k-j}, y que el lado derecho será igual a 1. Obtenemos por tanto que $a^{k-j} = 1$. Pero $k - j$ es más pequeño que k, y esto contradice nuestra elección de k. Por lo tanto, la primera repetición de nuestra lista tendrá la forma $a^k = 1$, de modo que los elementos 1, a, a^2..., a^{k-1} son todos distintos. Esto significa que forman un grupo de k elementos: {1, a, a^2..., a^{k-1}}. Se trata de un subgrupo de nuestro grupo original G de N elementos, en el sentido de que es un subconjunto de elementos de G tales que el resultado de la multiplicación de cualesquiera dos elementos de este subconjunto es también un elemento de este subconjunto; de que este subconjunto contiene el elemento identidad de G y de que este subconjunto contiene el inverso de todos sus elementos.
Ahora bien, se sabe que el número de elementos de todo subgrupo siempre es divisor del número de elementos del

grupo. A esta afirmación se le llama teorema de Lagrange. Le dejo a usted el trabajo de comprobarla (o puede buscarlo en Google).

Al aplicar el teorema de Lagrange al subgrupo $\{1, a, a^2..., a^{k-1}\}$, que tiene k elementos, vemos que k ha de ser divisor de N, el número de elementos del grupo G. Por lo tanto, $N = km$ para algún número natural m. Pero dado que $a^k = 1$, obtenemos que

$$a^N = (a^k)\cdot(a^k)\cdot...\cdot(a^k) = 1\cdot1\cdot...\cdot1 = 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Regresemos al grupo $\{1,2...,p-1\}$ con respecto a la multiplicación. Tiene p-1 elementos. Este es nuestro grupo G, de modo que nuestro N es igual a p - 1. Aplicando el resultado general en este caso, hallamos que $a^{p-1} = 1$ módulo p para todo a en $\{1,2...,p -1\}$. Pero entonces

$$a^p = a\cdot a^{p-1} = a\cdot1 = a \text{ módulo } p.$$

Es fácil ver que la última fórmula es válida para cualquier entero a, si estipulamos que

$$x = y \text{ módulo } p$$

siempre que $x - y = rp$ para algún entero r.

Este es el enunciado del pequeño teorema de Fermat. Fermat lo escribió por primera vez en una carta a su amigo: «Te escribiría una demostración —le escribió—, pero es demasiado larga».

[127] Hasta ahora hemos visto las operaciones aritméticas en módulo número primo p. Sin embargo, resulta que hay una afirmación análoga al pequeño teorema de Fermat en una aritmética de módulo cualquier número natural n. Para explicar qué es, primero he de recordar la función de Euler φ, de la que hablamos en conjunción con los grupos de trenzas en el capítulo 6. (En mi proyecto sobre grupos de trenzas, había hallado que los números de Betti de los grupos de trenzas se expresan en términos de esta función). Recordaremos que $\varphi(n)$ es el número de números naturales entre 1 y n-1 que son coprimos con n; es decir, que no tienen divisores en común con n (aparte de 1). Por ejemplo, si n es un número primo, entonces todos los números entre 1 y n-1 son coprimos con n, y por tanto $\varphi(n) = n-1$.

Pues bien, el análogo de la fórmula $a^{p-1} = 1$ módulo p que demostramos en la nota anterior es la fórmula

$$a^{\varphi(n)} = 1 \text{ módulo } n.$$

Vale para todo número natural n y cualquier número natural a que sea coprimo con n. Se demuestra exactamente de la misma manera que antes: tomamos todo el conjunto de números naturales entre 1 y n - 1 coprimos con n. Hay $\varphi(n)$ de ellos. Es fácil darse cuenta de que forman un grupo con respecto a la operación de multiplicación. Por tanto, por el teorema de Lagrange, para todo elemento de este grupo, su potencia $\varphi(n)$ es igual al elemento identidad.

Veamos, por ejemplo, el caso en que n es el producto de dos números primos, es decir, $n = pq$, en que p y q son dos números primos diferentes. En este caso, los números que no son coprimos con n son divisibles ya por p o por q. Los primeros tienen la forma pi, en que $i = 1...,q-1$ (hay q -1 de ellos), y los segundos tienen la forma qj, en que $j = 1...,p-1$ (hay p -1 de ellos). Por lo tanto, hallamos que

$$\varphi(n) = (n-1)-(q-1)-(p-1) = (p-1)(q-1).$$

Por lo tanto, tenemos

$$a^{(p-1)(q-1)} = 1 \text{ módulo } pq,$$

para todo número a que no sea divisible por p y por q. Y es fácil ver que la fórmula

$$a^{1+m(p-1)(q-1)} = a \text{ módulo } pq$$

es cierta para todo número natural a y todo entero m.

Esta ecuación es la base de uno de los algoritmos de encriptación más ampliamente utilizados, llamado algoritmo RSA (por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, quienes lo describieron en 1977). La idea es que escogemos dos números primos p y q (existen varios algoritmos para generarlos) y decimos que n es el producto de pq. El número n se hace público, pero los números primos p y q no. Acto seguido escogemos un número e coprimo con $(p-1)(q-1)$. Este número también se hace público. El proceso de encriptado convierte todo número a (como el número de una tarjeta de crédito) a a^e módulo n:

$$a\ ?\ b = a^e \text{ módulo } n.$$

Resulta que hay una manera eficaz de reconstruir a a partir de a^e. Básicamente, hallamos un número d entre 1 y $(p-1)(q-1)$ tal que

$$de = 1 \text{ módulo } (p - 1)(q - 1).$$

Dicho de otro modo,

$$de = 1 + m(p - 1)(q - 1)$$

para algún número natural m. Luego

$$a^{de} \text{ módulo } n = a^{1+m(p-1)(q-1)} \text{ módulo } n$$

= a módulo n según la fórmula arriba descrita.
Por lo tanto, dado que $b = a^e$, podemos recuperar el número original a como sigue:

$$b \; ? \; b^d \text{ módulo } n.$$

Resumamos: hacemos públicos los números n y e, pero mantenemos en secreto d. La fórmula

$$a \; ? \; b = a^e \text{ módulo } n$$

nos da la encriptación. Cualquiera puede hacerlo porque e y n son de dominio público.
La desencriptación nos la da la fórmula

$$b \; ? \; b^d \text{ módulo } n.$$

Aplicada a a^e, nos devuelve el número a original. Pero sólo quienes conocen d pueden hacer esto.
La razón por la que este es un buen código de encriptación es que a fin de hallar d, que nos permite reconstruir los números codificados, hemos de conocer el valor de $(p - 1)(q - 1)$. Pero para ello hemos de saber el valor de p y q, dos números primos divisores de n. Y estos se mantienen en secreto. Con un n suficientemente grande, pueden tardarse muchos meses, incluso con una red de ordenadores potentes, en hallar p y q. Por ejemplo, en 2009, un grupo de investigadores, empleando cientos de ordenadores en paralelo, fueron capaces de factorizar en números primos un número de 232 dígitos. Tardaron dos años (véase eprint.iacr.org). Pero si alguien hallara una manera más eficaz de «factorizar» números naturales en números primos (por ejemplo, con un ordenador cuántico), tendría una herramienta para romper este código de encriptación. Esta es la razón de que se dedique tanto esfuerzo a factorizar números naturales en primos.

[128] En el caso de los números racionales, vimos que las ecuaciones con forma $x^2 = 2$ pueden no tener soluciones en números racionales, pero en ese caso creábamos un nuevo sistema numérico sumando estas soluciones, como $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Después vimos que intercambiar $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ era una simetría de este sistema numérico.
De manera similar podemos considerar ecuaciones polinómicas en la variable x, como $x^2 = 2$ o $x^3 - x = 1$, como ecuaciones en el cuerpo finito $\{0, 1, 2\ldots, p - 1\}$. Luego podemos preguntarnos si esta ecuación puede resolverse para x dentro de este cuerpo finito. Si no tiene solución podemos añadir las soluciones al cuerpo finito, de manera similar a como añadimos $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ a los números racionales. De esta manera creamos nuevos cuerpos finitos.
Por ejemplo, si $p = 7$, la ecuación $x^2 = 2$ tiene dos soluciones,3 y 4, porque

$$3^2 = 9 = 2 \text{ módulo } 7, \text{ y} 4^2 = 16 = 2 \text{ módulo } 7.$$

Nótese que 4 es -3 en la aritmética módulo 7 porque $3+4 = 0$ módulo 7. Así que estas dos soluciones de la ecuación $x^2 = 2$ son opuestas cada una de la otra, de la misma manera en que $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son las opuestas cada una de la otra.
Esto no resulta una sorpresa: las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 2$ serán siempre los opuestos una de la otra, porque si $a^2 = 2$, entonces también $(-a)^2 = (-1)^2a^2 = 2$. Esto significa que si $p = 2$, habrá siempre dos elementos del cuerpo finito que, elevados al cuadrado, den el mismo número, y serán el opuesto uno del otro: si $p = 2$, entonces p es necesariamente impar, y por lo tanto $-a$ no puede ser igual a a, puesto que de otro modo p sería igual a $2a$. Por lo tanto, sólo la mitad de los elementos diferentes a cero del cuerpo finito $\{1,2\ldots, p - 1\}$ son cuadrados.
(La famosa ley de reciprocidad de Gauss describe qué números n son cuadrados en la aritmética módulo p y cuáles no lo son. Esto va más allá del alcance de este libro, pero podemos decir que la respuesta tan sólo depende del valor de p módulo $4n$. Así, por ejemplo, ya sabemos que $n = 2$ es un cuadrado módulo $p = 7$. En este caso, $4n = 8$. Por lo tanto, también será un cuadrado módulo cualquier número primo p que sea igual a 7 módulo 8, no importa lo grande que sea. ¡Un resultado asombroso!)
Si $p = 5$, entonces $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$, y $4^2 = 1$ módulo 5. De modo que 1 y 4 son cuadrados módulo 5, pero 2 y 3 no lo son. En especial, vemos que no hay soluciones para la ecuación $x^2 = 2$ en el cuerpo finito $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, exactamente igual que ocurría con los números racionales. Por lo tanto, podemos crear un nuevo sistema numérico ampliando el cuerpo finito $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ añadiendo las soluciones de $x^2 = 2$. Señalémoslas, una vez más, como $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ (pero recordemos que no son los mismos números que añadimos anteriormente a los números racionales).
Obtenemos un nuevo cuerpo numérico que consiste en números con la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b se encuentran en

{0, 1, 2, 3, 4}. Dado que tenemos dos parámetros que pueden tomar los valores 0, 1, 2, 3 o 4, hallamos que este nuevo sistema posee 5·5 = 25 elementos. De un modo más general, toda extensión del cuerpo finito {0, 1, 2…, p-1} posee p^m elementos para un número natural m.
Ahora supongamos que añadimos todas las soluciones de todas las ecuaciones polinómicas en una variable al cuerpo finito {0, 1, 2…, p-1}. Obtenemos un nuevo sistema numérico denominado *clausura algebraica* del cuerpo finito. El cuerpo finito original posee p elementos. Resulta que su clausura algebraica posee infinitos elementos. Nuestra siguiente pregunta es cuál es el grupo de Galois de esta clausura algebraica. Este es las simetrías de esta clausura algebraica, que conservan las operaciones de suma y multiplicación y envían los elementos del cuerpo original de p elementos a sí mismos.
Si comenzamos con el cuerpo de números racionales y tomamos su clausura algebraica, el grupo de Galois correspondiente es muy complicado. De hecho, el Programa Langlands se creó en parte para describir este grupo de Galois y sus representaciones en términos de análisis armónico.
En cambio, el grupo de Galois del cuerpo finito {0, 1, 2…, p -1} resulta ser bastante sencillo. Ya conocemos una de las simetrías: la Frobenius, que es la operación de elevar a la p-ésima potencia: a ? a^p. Según el pequeño teorema de Fermat, la Frobenius conserva todos los elementos del campo finito original de p elementos. También conserva la suma y la multiplicación en la clausura algebraica:

$$(a+b)^p = a^p + b^p,\ (ab)^p = a^p b^p.$$

Por lo tanto, la Frobenius pertenece al grupo de Galois de la clausura algebraica del cuerpo finito.
Señalemos la Frobenius como F. Claramente, toda potencia entera Fn de la Frobenius es también un elemento del grupo de Galois. Por ejemplo, F^2 es la operación de elevar un número a p^2, a ? $ap^2 = (a^p)^p$. Las simetrías F^n, en que n recorre todos los enteros, forman un subgrupo del grupo de Galois, que se denomina grupo de Weil en honor a André Weil. El propio grupo de Galois es lo que se denomina una completación del grupo de Weil; además de las potencias de enteros de F, también comprende como elementos ciertos límites de F^n conforme n tiende a *8*. Pero en un sentido menos apropiado, la Frobenius genera el grupo de Galois.
He aquí un ejemplo de cómo actúa la Frobenius sobre elementos de la clausura algebraica de un cuerpo finito. Consideremos el caso p = 5 y los elementos de la clausura algebraica de la forma arriba mencionada

$$a + b\sqrt{2}$$

en que a y b son 0,1,2,3 o 4. Este sistema numérico posee una simetría que intercambia √2 y -√2:

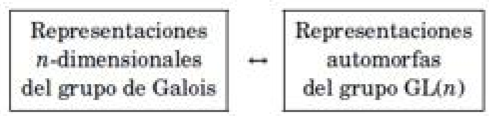
$$a + b\sqrt{2} \rightarrow a - b\sqrt{2}$$

en paralelo con lo que sucede cuando añadimos √2 a los números racionales. Lo sorprendente (y que no tiene analogía en el caso de los números racionales) es que este intercambio simétrico es, *de facto*, igual a la Frobenius. En efecto, aplicar la Frobenius a √2 implica elevarla a la 5ª potencia, y tenemos que

$$(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2(\sqrt{2}) = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

porque 4 =-1 módulo 5. De ello se sigue que para p = 5 la Frobenius transforma $a + b\sqrt{2}$ en $a - b\sqrt{2}$. Lo mismo es cierto para cualquier número primo p tal que la ecuación $x^2 = 2$ no tenga soluciones en el cuerpo finito {0, 1, 2…, p -1}.
[129] Una simetría de un espacio vectorial n-dimensional, más correctamente llamada transformación lineal (véase nota 2) se puede representar mediante una matriz, que es una disposición de números a_{ij} formando una rejilla cuadrada, en que i y j van de 1 a n, en que n es la dimensión del espacio vectorial. La traza es la suma de los elementos en diagonal de esta matriz, es decir, de todo a_{ii} con i oscilando entre 1 y n.
[130] En este contexto, pasar de funciones a haces implicaría hallar, para una función dada f , un haz tal que para cada punto s de nuestra variedad, la traza de la Frobenius en la fibra en s fuera igual al valor de f en s. Todo número puede entenderse como la traza de una simetría de un espacio vectorial. Lo difícil es combinar estos espacios vectoriales en una agrupación coherente que satisfaga las propiedades de un haz.
[131] Una representación del grupo de Galois en un grupo H es una regla que asigna a cada elemento del grupo de Galois un elemento de H. Debería satisfacer la condición de que si a,b son dos elementos del grupo de Galois y $f(a)$, $f(b)$ son los elementos de H asignados a ellos, al producto ab en el grupo de Galois se le debería asignar el producto $f(a)f(b)$ en H. Un nombre más apropiado para esto es el de *homomorfismo* del grupo de Galois en H.
[132] Para obtener un poco más de precisión al respecto, recordemos la noción de espacio vectorial n-dimensional de la nota 17 del capítulo 10. Como hablamos en el capítulo 2, una representación n-dimensional de un grupo dado es una regla que asigna una simetría S_g de un espacio vectorial n-dimensional a cada elemento g de este grupo. Esta regla ha de satisfacer la siguiente propiedad: para dos elementos cualesquiera del grupo, g y h, y su producto gh en el grupo, la simetría S_{gh} es igual a la composición de S_g y S_h. También se requiere que para todo elemento g tengamos $S_g(\vec{a} + \vec{b}) = S_g(\vec{a})+S_g(\vec{b})$ y $S_g(k\cdot\vec{a}) = k\cdot S_a(\vec{a})$ para todo vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ y un número k. A estas simetrías se les llama transformaciones lineales; véase nota 2 del capítulo 14.
Al grupo de todas las transformaciones lineales invertibles de un espacio vectorial n-dimensional se le denomina grupo lineal general. Se escribe como GL(n). Así, según la definición del párrafo anterior, la representación n-dimensional de

un grupo dado Γ es igual que una representación de Γ en GL(*n*), o un homomorfismo de Γ en GL(*n*); véase nota 1.
Por ejemplo, en el capítulo 10 hablábamos de la representación tridimensional del grupo SO(3). Cada elemento del grupo SO(3) es una rotación de la esfera, a la que asignamos la correspondiente rotación del espacio vectorial tridimensional que contiene la esfera (resulta ser una transformación lineal). Esto nos proporciona una representación de SO(3) en GL(3), o, de modo equivalente, un homomorfismo de SO(3) en GL(3). De modo intuitivo, podemos pensar en la rotación como en «actuar» sobre el espacio tridimensional, rotando cada vector en este espacio hacia otro vector.
En un lado de la relación Langlands (también conocida como correspondencia Langlands) observamos representaciones *n*-dimensionales del grupo de Galois. En el otro lado tenemos funciones automorfas que se pueden emplear para construir las llamadas representaciones automorfas de otro grupo GL(*n*) de simetrías del espacio vectorial *n*-dimensional, aunque no sobre los números reales, sino sobre lo conocido como adeles. No intentaré explicar qué son estos, pero el siguiente diagrama muestra esquemáticamente cómo sería la relación Langlands:



Por ejemplo, dos representaciones bidimensionales del grupo de Galois están relacionadas con las representaciones automorfas del grupo GL(2), que se pueden construir a partir de las formas modulares de las que hablamos en el capítulo 9.
Se obtiene una generalización de esta relación sustituyendo el grupo GL(*n*) por un grupo de Lie más general. Entonces, en el lado derecho de la relación tenemos representaciones automorfas de *G*, en lugar de las de GL(*n*). En el lado izquierdo tenemos representaciones del grupo de Galois en el grupo dual Langlands ^{L}G, en lugar de en GL(*n*)(o, de modo equivalente, homomorfismos del grupo de Galois en ^{L}G). Para más detalles véase, por ejemplo, mi artículo Frenkel, Edward, «Lectures on the Langlands Program and conformal field theory», en *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry II*, Cartier, P. *et al.* (eds.), pp. 387-536, Springer-Verlag, Berlín/Nueva York 2007, disponible *online* en arxiv.org.

[133] Véase el vídeo en www.youtube.com.

[134] Esta danza se llama binasuan. Véase, por ejemplo, el vídeo www.youtube.com.

[135] Para la construcción de este camino y la explicación de por qué si lo recorremos dos veces obtenemos un camino trivial, véase, por ejemplo, Kaufmann, Louis H., *Knots and Physics*, World Scientific, Nueva Jersey/Singapur, 2001[3], pp. 419-420.

[136] Dicho de otro modo, el grupo fundamental de SO(3) consiste en sólo dos elementos: uno es la identidad y el otro es el camino, cuyo cuadrado es la identidad.

[137] El nombre matemático de este grupo es SU(2). Consiste en las transformaciones «unitarias especiales» del espacio vectorial complejo bidimensional. Este grupo es primo hermano del grupo SU(3) del que hablamos en el capítulo 2 en relación a los quarks, y que consiste en transformaciones unitarias especiales del espacio vectorial complejo tridimensional.

[138] De un modo más preciso, la elevación del camino cerrado que hemos construido (correspondiente al primer giro del vaso) del grupo SO(3) a su doble recubrimiento, el grupo SU(2), será un camino que comienza y acaba en diferentes puntos de SU(2), puntos ambos que se proyectan sobre el mismo punto de SO(3), de modo que no se trata de un camino cerrado en SU(2).

[139] En general, esta relación es más sutil, pero para simplificar, en este libro daremos por sentado que el dual del grupo dual es el propio grupo.

[140] Un fibrado principal *G* (o *G*-fibrado) sobre una superficie de Riemann es una fibración sobre la superficie de Riemann tal que todas las fibras son copias de la «complexificación» del grupo *G* (se define sustituyendo, en la definición del grupo, números reales por números complejos). Los puntos del espacio de móduli (más correctamente llamadas pilas), del *G*-fibrado sobre *X* son la clase equivalente a los *G*-fibrados sobre *X*.
A fin de simplificar la explicación, en este libro no hacemos distinción entre un grupo de Lie y su complexificación.

[141] En el grupo fundamental identificamos dos caminos cerrados cualesquiera que puedan deformarse hasta ser uno como el otro. Dado que cualquier camino cerrado en el plano que no rodee el punto extraído se puede contraer hasta un punto, los elementos no triviales del grupo fundamental son aquellos caminos cerrados que rodean este punto (los que no se pueden contraer, porque el punto que hemos retirado del plano constituye un obstáculo para hacerlo).
Es fácil darse cuenta de que dos caminos cerrados cualesquiera con el mismo índice pueden deformarse hasta ser uno como el otro. De modo que el grupo fundamental del plano sin un punto no es sino el grupo de los números enteros. Nótese en este debate las reminiscencias de lo que hablamos en el capítulo 5 sobre el grupo de trenzas con dos hebras, que también resultó ser el mismo que el grupo de números enteros. No se trata de una coincidencia, puesto que el espacio de pares de puntos distintos en el plano es topológicamente equivalente al plano con un punto retirado.

[142] La razón por la que la monodromía toma valores en el grupo circular reside en la famosa fórmula de Euler:

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{-1}$$

En otras palabras, el número complejo

$$e^{\theta\sqrt{-1}}$$

está representado por el punto en la circunferencia unidad correspondiente al ángulo θ medido en radianes. Recordemos que 2π radianes equivalen a 360 grados (lo que corresponde a una rotación completa de la circunferencia). Por lo tanto, el ángulo θ medido en radianes es el ángulo $360\cdot\theta/2\pi$ grados. Un caso especial para esta fórmula, para $\theta = \pi$, es

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

al que Richard Feynman llamó «una de las fórmulas más notables, casi asombrosas, de todas las matemáticas». Desempeñó un papel preeminente en la novela *The Housekeeper and the Professor*, de Ogawa, Yoko, Picador, Nueva York, 2009. [Hay trad. cast.: *La fórmula preferida del profesor*, Funambulista, Madrid, 2008, trad. de H. Jiménez Ferrer y L. González Sotos.] Otro caso especial, no menos importante, es

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$$

Esto significa que la circunferencia unidad en el plano complejo con la coordenada t, sobre el que se define la solución para nuestra ecuación diferencial, consiste en todos los puntos de la forma

$$t \quad e^{\theta\sqrt{-1}}$$

donde θ varía entre 0 y 2π. A medida que nos movemos a lo largo de la circunferencia unidad en el sentido contrario a las agujas del reloj, estamos evaluando nuestra solución $x(t) = t^n$ en los puntos $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, permitiendo que el ángulo θ aumente desde 0 a 2π (en radianes). Hacer la circunferencia completa significaría hacer que θ fuera igual a 2π. Por lo tanto, para obtener el correspondiente valor a nuestra solución, deberemos sustituir $t = e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$ en t^n. El resultado es $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$. Pero el valor original de la solución se obtiene sustituyendo $t = 1$ en t^n, que es 1. Por lo tanto, hallamos que cuando recorremos el camino cerrado en dirección contraria a las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia unidad, nuestra solución se ve multiplicada por $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$. Y esa es la monodromía a lo largo de este camino.

Esta monodromía $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ es un número complejo que se puede representar mediante un punto en la circunferencia unidad en *otro* plano complejo. Ese punto corresponde al ángulo $2\pi n$ radianes, o $360n$ grados, que es lo que queríamos mostrar. En realidad, multiplicar cualquier número complejo z por $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ equivale, geométricamente, a rotar el punto del plano correspondiente a z por $360n$ grados. Si n es un entero, entonces $e^{2\pi n\sqrt{-1}} = 1$, de modo que no se da monodromía, pero si n no es un entero, tenemos una monodromía no trivial.

Para evitar confusiones, quisiera subrayar que aquí tenemos dos planos complejos diferentes: uno es el plano complejo en el que se define nuestra solución: el «t-plano». El otro es el plano en el que representamos la monodromía. No tiene nada que ver con el t-plano.

Para recapitular: hemos interpretado la monodromía de la solución a lo largo de un camino cerrado con el índice +1 sobre el t-plano como un punto de otra circunferencia unidad. De modo similar, si el índice del camino es w, entonces la monodromía de este camino es $e^{2\pi wn\sqrt{-1}}$, que equivale a la rotación de $2\pi nw$ radianes, o $360wn$ grados. Así pues, la monodromía da lugar a una representación del grupo fundamental del grupo circular. Bajo esta representación, el camino en el t-plano sin un punto, cuyo índice es w, va a la rotación por $360wn$ grados.

[143] Nótese que es importante que hayamos eliminado un punto, el origen, del plano. De otra manera, todo camino en el plano se colapsaría y el grupo fundamental sería trivial. Luego no sería posible ninguna monodromía. Estamos obligados a eliminar este punto porque nuestra solución, t^n, no se define en el origen si n no es un número natural o 0 (en ese caso no hay monodromía).

[144] Para ser más exactos, no todas las representaciones del grupo fundamental en ^LG se pueden obtener mediante opers, y en este diagrama nos restringimos a las que sí se puede. Para otras representaciones, el interrogante sigue abierto.

[145] Frenkel, Edward, *Langlands correspondence for loop groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. Hay una versión *online* disponible en math.berkeley.edu.

[146] Puede que se esté preguntando qué ocurrió entre 1991 y 2003. Bueno, mi principal objetivo en este libro es explicarle acerca de los diversos aspectos del Programa Langlands que encuentro más interesantes, y cómo se efectuaron los descubrimientos en esta área, en los que tuve la suerte de participar. No intento relatar la historia de mi

vida hasta la fecha. Pero, por si tiene curiosidad, durante esos años trasladé a mi familia de Rusia a Estados Unidos, me mudé al Oeste, a Berkeley, California, me enamoré y luego me desenamoré, me casé y me divorcié, llevé un montón de estudiantes de doctorado, viajé y di conferencias por todo el mundo y publiqué un libro y decenas de artículos académicos. Proseguí intentando descubrir los misterios del Programa Langlands en diferentes dominios: desde la geometría hasta los sistemas integrables, de grupos cuánticos a la física cuántica. Le ahorraré los detalles de esta parte de mi vida para otro libro.

[147] Véase www.darpa.mil.

[148] Hardy, G. H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, p. 135. [Hay trad. cast.: *Autojustificación de un matemático*, Ariel, Barcelona, 1981, trad. de Domènec Bergadá.]

[149] Testimonio ante el Congreso de R. R. Wilson, 17 de abril de 1969, citado en history.fnal.gov.

[150] Las ecuaciones de Maxwell en el vacío tienen esta forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

en las que $\vec{E}$ señala el campo eléctrico y $\vec{B}$ señala el campo magnético (para simplificar las fórmulas, escogemos un sistema de unidades en que la velocidad de la luz es igual a 1). Está claro que si transformamos

$$\vec{E} \to \vec{B}, \quad \vec{B} \to -\vec{E}$$

las ecuaciones del lado izquierdo se convertirán en las ecuaciones del lado derecho, y viceversa. Por lo tanto, las ecuaciones cambian individualmente, pero el sistema de ecuaciones no lo hace.

[151] Véase la página de Flickr de Dayna Mason: http://www.flickr.com/ photos/daynoir

[152] Este grupo gauge SU(3) no debería confundirse con el otro grupo SU(3) nombrado en el capítulo 2, y empleado por Gell-Mann y otros para clasificar partículas elementales (se llama «grupo de sabor»). El grupo de gauge SU(3) tiene que ver con una característica de los quarks llamada «color». Resulta que cada quark puede tener tres colores diferentes, y el grupo de gauge SU(3) es el responsable de cambiar estos colores. Por ello, la teoría de gauge que describe la interacción de quarks recibe el nombre de cromodinámica cuántica. David Gross, David Politzer y Frank Wilczek recibieron el premio Nobel por su sorprendente descubrimiento de la denominada libertad asintótica en la cromodinámica cuántica (y otras teorías de gauge no abelianas), que contribuyó a explicar el misterioso comportamiento de los quarks.

[153] Zhang, D. Z., «C. N. Yang and contemporary mathematics», *Mathematical Intelligencer*, vol. 15, n.º 4, 1993, pp. 13-21.

[154] Einstein, Albert, «Geometría y experiencia», discurso ante la Academia Prusiana de Ciencias en Berlín, 27 de enero de 1921. Citado en Jeffrey, G., y W. Perrett, *Geometry and Experience in Sidelights on Relativity*, Methuen, York, 1923.

[155] Wigner, Eugene, «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, 1960, pp. 1-14.

[156] Montonen. C., y D. Olive, «Magnetic monopoles as gauge particles?», *Physics Letters B*, vol. 72, 1977, pp. 117-120.

[157] Goddard, P., Nuyts, J. y D. Olive, «Gauge theories and magnetic charge», *Nuclear Physics B*, vol. 125, 1977, pp. 1-28.

[158] S_e es el conjunto de representaciones unidimensionales complejas del toro maximal de G, y S_m es el grupo fundamental del toro maximal de G. Si G es el grupo circular, su toro maximal es el propio grupo circular, y cada uno de estos dos conjuntos está en correspondencia uno a uno con el conjunto de enteros.

[159] El espacio $M(X,G)$ puede describirse de varias maneras; por ejemplo, como el espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en X, estudiado por primera vez por Hitchin (véase artículo en la nota 19 para más detalles). Una descripción que nos resultará útil en este capítulo es que $M(X,G)$ es el espacio de móduli de representaciones del grupo fundamental de la superficie de Riemann S en la complexificación del grupo G (véase nota 10 del capítulo 15). Esto significa que se asigna tal representación a cada punto de $M(X,G)$.

[160] Véase el vídeo de la conferencia de Hitchin en el Instituto Fields: www.fields.utoronto.ca.

[161] Me refiero aquí al reciente trabajo de Ngô Bao Châu acerca de la prueba del «lema fundamental» del Programa Langlands. Véase, por ejemplo, el artículo: Nadler, David, «The geometric nature of the fundamental lemma», *Bulletin of American Mathematical Society*, vol. 49, 2012, pp. 49-52.

[162] Recordemos que en el modelo sigma todo se calcula mediante la suma de las aplicaciones de una superficie de Riemann Σ a la variedad objetivo S. En teoría de cuerdas, efectuamos un paso más: además de sumar todos los mapas de una Σ fijada a S, como hacemos normalmente en el modelo sigma, le sumamos también todas las posibles superficies de Riemann Σ (la variedad objetivo S permanece fija todo el tiempo: es nuestro espacio-tiempo). En particular sumamos las superficies de Riemann de género arbitrario.

[163] Para más información acerca de la teoría de supercuerdas, véase Greene, Brian, *The Elegant Universe*, Vintage Books, Nueva York, 2003, y *The Fabric of the Cosmos: Space, Time and the Texture of Reality*, Vintage Books, Nueva York, 2005. [Hay trad. cast., *El universo elegante*, Booket ciencia (Planeta), Barcelona, 2012, trad. de Mercedes García

Garmilla. Y *El tejido del cosmos*, Planeta, Barcelona, 2010, trad. de Javier García Sanz].
[164] Para más información acerca de variedades Calabi-Yau y su papel en la teoría de supercuerdas, véase Yau, Shing-Tung, y Steve Nadis, *The Shape of Inner Space*, Basic Books, Nueva York, 2010, capítulo 6.
[165] Un toro tiene también dos parámetros continuos: básicamente, los radios R_1 y R_2 de que hablamos en este capítulo, pero para el tema tratado en esta ocasión los ignoraremos.
[166] Una solución que se ha debatido mucho últimamente es la idea de que cada una de estas variedades da lugar a su propio universo con sus propias leyes físicas. Esto va de la mano de una versión del principio antrópico: nuestro universo se selecciona entre ellas porque las leyes físicas que posee permiten que haya vida inteligente (de tal modo que la pregunta «¿por qué es así nuestro universo?» pueda responderse). Sin embrago, esta idea, denominada «paisaje de la teoría de cuerdas» o «multiverso», ha hallado mucho escepticismo con apoyo en criterios tanto científicos como filosóficos.
[167] Muchas de las interesantes propiedades de las teorías cuánticas de campos en varias dimensiones se han descubierto o dilucidado al conectar estas teorías con la teoría de supercuerdas, empleando reducciones dimensionales o estudiando branas. En cierto sentido, la teoría de supercuerdas se ha empleado como fábrica para producir y analizar teorías cuánticas de campos (en su mayoría, supersimétricas). Por ejemplo, de esta manera se obtiene una bella interpretación de la dualidad electromagnética de las teorías de gauge supersimétricas tetradimensionales. De modo que, aunque aún no sabemos si la teoría de supercuerdas es capaz de describir la física de nuestro universo (e incluso pese a que todavía no comprendemos del todo qué es la teoría de supercuerdas), ya ha generado muchos valiosos descubrimientos en teoría cuántica de campos. También ha llevado a numerosos avances en matemáticas.
[168] La dimensión del espacio de móduli de Hitchin $M(X,G)$ es igual al producto de la dimensión del grupo G (que es la misma dimensión en ${}^LG$) por (g-1), donde g indica el género de la superficie de Riemann X.
[169] Para más información acerca de las branas, véase Randall, Lisa, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*, Harper Perennial, Nueva York, 2006; especialmente el cap. IV.
[170] De un modo más preciso, las A-branas en $M(X,G)$ son objetos de una categoría, el concepto del que hablamos en el capítulo 14. Las B-branas en $M(X,L_G)$ son objetos de otra categoría. La afirmación de simetría especular homológica es que ambas categorías son recíprocamente equivalentes.
[171] Kapustin, Anton, y Edward Witten, «Electric-magnetic duality and the geometric Langlands Program», *Comunications in Number Theory and Physics*, vol. 1, 2007, pp. 1-236.
[172] Para más información acerca de la dualidad T, véase capítulo 7 del libro de Yau y Nadis referido en nota 6.
[173] Para más información acerca de la conjetura SYZ, véase capítulo 7 del libro de Yau y Nadis referido en nota 6.
[174] Para ser más exactos, toda fibra es el producto de n circunferencias, en que n es un número natural, de modo que es un análogo *n*dimensional de un toro bidimensional. Nótese también que la dimensión de la base de la fibración Hitchin y la dimensión de cada fibra tórica serán siempre iguales entre sí.
[175] En el capítulo 15 tratamos una construcción diferente en la que obteníamos los haces automorfos a partir de representaciones de álgebras Kac-Moody. Se cree que ambas construcciones están relacionadas, pero en el momento de escribir este libro esta relación es aún desconocida.
[176] Frenkel, Edward, y Edward Witten, «Geometric endoscopy and mirror symmetry», *Communications in Number Theory and Physics*, vol. 2, 2008, pp. 113-283, disponible *online* en arxiv.org.
[177] Frenkel, Edward, «Gauge theory and Langlands duality», *Astérisque*, vol. 332, 2010, pp. 369-403, disponible *online* en arxiv.org.
[178] Thoreau, Henry David, *A Week on the Concord and Merrimack Rivers*, Penguin Classics, Londres/Nueva York, 1998, p. 291.
[179] Snow, C. P., *The Two Cultures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. [Existen varias traducciones al castellano, la más conocida, *Las dos culturas y un segundo enfoque*, Alianza, Madrid, 1977, trad. de Salustiano Masó.]
[180] Farber, Thomas, y Edward Frenkel, *The Two-Body Problem*, Andrea Young Arts, 2012. Véase thetwobodyproblem.com para más detalles.
[181] Harris, Michael, *Further investigations of the mind-body problem*, capítulo de un libro en preparación, disponible *online* en www.math.jussieu.fr.
[182] Thoreau, Henry David, *A Week on the Concord and Merrimack Rivers*, Penguin Classics, Londres/Nueva York, 1998, p. 291.
[183] Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Touchstone Books, Nueva York 1986, p. 16. [Véase nota 8, capítulo 9 para traducciones en castellano.]
[184] Langlands, Robert, «Is There Beauty in Mathematical Theories?», en Hössle, Vittorio (ed.), *The Many Faces of Beauty*, University of Notre Dame Press, Notre Dame (Indiana), 2013, disponible *on-line* en publications.ias.edu.
[185] Manin, Yuri I., *Mathematics as Metaphor: Selected Essays*, American Mathematical Society, Washington D.C., 2007, p. 4.
[186] Los filósofos han debatido sobre la ontología de las matemáticas durante siglos. El punto de vista que defiendo en este libro suele denominarse platonismo matemático. Nótese, sin embargo, que hay diferentes tipos de platonismos, y que hay también otras interpretaciones de las matemáticas. Véase, por ejemplo, Balaguer, Mark, «Mathematical Platonism», en Gols, Bonnie, y Roger Simons (eds.), *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, Mathematics Association of America, Wasshington D.C., 2008, pp. 179-204, y las referencias que contiene.
[187] Penrose, Roger, *The Road to Reality*, Vintage Books, Nueva York, 2004, p. 15. [Hay trad. cast.: *El camino a la realidad: una guía completa de las leyes del universo*, Debate, Barcelona, 2007, trad. de Javier García Sanz.]
[188] *Ibid.*, pp. 13-14.

[189] Gödel, Kurt, *Collected Works*, vol. III, Oxford University Press, Londres, 1995, p. 320. [Hay trad. cast.: *Obras completas*, Alianza, Madrid, 2006, trad. y ed. de Jesús Mosterín.]

[190] *Ibid.*, p. 323.

[191] Penrose, Roger, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, Londres, 1994, sección 8.47. [Hay trad. cast.: *Las sombras de la mente: hacia una comprensión científica de la consciencia*, Crítica, Barcelona, 1996, trad. de Javier García Sanz.]

[192] En la histórica sentencia «Gottschalk vs. Benson», 409 U. S. 63 (1972) el Tribunal Supremo de Estados Unidos dictaminó (citando casos anteriores llevados a juicio): «una verdad científica, o la expresión matemática de la misma, no es un invento patentable... Un principio, en abstracto, es una verdad fundamental, una causa original, un motivo; estos no se pueden patentar, dado que nadie puede arrogarse la propiedad exclusiva de ninguno de ellos... Quien descubre un fenómeno de la naturaleza hasta entonces desconocido no tiene derecho a monopolio alguno del mismo que la ley reconozca».

[193] Frenkel, Edward, Losev, Andrei, y Nikita Nekrasov, «Instantons beyond topological theory I», *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, vol. 10, pp. 463-565. Hay una nota a pie de página en el artículo que explica que la fórmula (5.7) interpretó el papel de «fórmula del amor» en *Ritos de amor y matemáticas*.

[194] Consideramos el modelo mecánico cuántico supersimétrico sobre la esfera (aquí señalado como P^1, y la función de correlación entre dos observables, señalados como F y ω. Esta función de correlación se define en nuestra teoría como la integral que aparece en el lado izquierdo de la fórmula. Sin embargo, nuestra teoría predice una expresión diferente para ella: una suma de los «estados intermedios» que aparecen en el lado derecho. La coherencia de nuestra teoría exige que ambos lados sean iguales entre sí. Y, en efecto, lo son: es lo que dice nuestra fórmula).

[195] *Le Monde Magazine*, 10 de abril de 2010, p. 64.

[196] Spinney, Laura: «Erotic equations: Love meets mathematics on film», *New Scientist*, 13 de abril de 2010, disponible *online* en ritesofloveandmath.com.

[197] Lehning, Hervé, «La dualité entre l'amour et les maths», *Tangente Sup*, vol. 55, mayo-junio de 2010, pp. 6-8, disponible *online* en ritesofloveandmath.com.

[198] Empleamos el poema *Para muchos*, de Anna Ajmátova, la gran poetisa rusa de primera mitad del siglo XX. [Disponible en castellano en www.amediavoz.com en trad. de M.ª Teresa León.]

[199] Farber, Norma, *A Desperate Thing*, The Plowshare Press Incorporated, 1973, p. 21.

[200] Carta de Albert Einstein a Phyllis Wright, 24 de enero de 1936, citada en Isaacson, Walter, *Einstein: His Life and Universe*, Simon & Schuster, Nueva York, 2007, p. 388. [Hay trad. cast.: *Einstein: su vida y su universo*, DeBolsillo, Barcelona, 2012, trad. de Francisco José Ramos Mena.]

[201] Brewster, David, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries os Sir Isaac Newton*, vol. 2, Adamant Media Corporation, Bocton, Massachusetts, 2001 (reimpresión de la edición de 1855 de Thomas Constable & Co.), p. 407.

[202] Frenkel, Edward, Langlands, Robert, y Ngô Bao Châu, «Formule des Traces et Fonctionalité: le Début d'un Programme», *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, n.º 34 (2010), pp. 199-243, disponible *online* en arxiv.org. Y Frenkel, Edward, «Langlands Program, trace formulas and their geometrization», *Bulletin of AMS*, vol. 50, 2013, pp. 1-55, disponible *online* en arxiv.org.